XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8o. e 9o. Anos)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Num tabuleiro 3×3 escrevemos os números de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, achamos a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal e contamos o número de somas que são múltiplos de três. Por exemplo, no tabuleiro ao lado as 8 somas (as três linhas, as três colunas e as duas diagonais) são números múltiplos de 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

É possível que nenhuma das 8 somas seja um múltiplo de 3?
Lembre-se de que você deve justificar sua resposta.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AD = DC$, $AC = AB$ e $\angle ADC = \angle CAB$. Se M e N são os pontos médios dos lados AD e AB, prove que o triângulo MNC é isósceles.

PROBLEMA 3

Esmeralda e Jade participam de um jogo: Esmeralda faz uma lista de 2011 números inteiros positivos, mas não mostra para Jade. Jade deve descobrir o produto dos números. Para isso, ela pode perguntar qual é o mdc ou o mmc dos números de qualquer subconjunto com mais de um elemento dos 2011 números (por exemplo, “qual é o mdc do 1º, 2º, 10º e 2000º números da sua lista?” ou “qual é o mmc de todos os números da lista?”). Jade pode fazer quantas perguntas quiser, mas só obtém as respostas (corretas) de Esmeralda após fazer todas as suas perguntas (Esmeralda é generosa e também diz qual é a resposta de cada pergunta). Jade então pode fazer qualquer uma das quatro operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão) com os números que obtiver de Esmeralda. Jade consegue uma estratégia para obter o produto dos 2011 números de Esmeralda? Justifique sua resposta.

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Esmeralda escreveu uma lista de números inteiros positivos em uma folha de papel. Renan percebeu que todos os números da lista e todas as somas de qualquer quantidade de números distintos da lista não eram divisíveis por nenhum quadrado perfeito diferente de 1. Qual a quantidade máxima de números na lista de Esmeralda?

PROBLEMA 5

No interior de um quadrado de lado 16 são colocados 1000 pontos. Mostre que é possível colocar um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ no plano de modo que ele cubra pelo menos 16 destes pontos.

PROBLEMA 6

Para qualquer número natural N de $2k$ dígitos, seja $I(N)$ o número de k dígitos obtido escrevendo os algarismos de ordem ímpar de N da esquerda para a direita e $P(N)$ como o número de k dígitos obtido escrevendo os algarismos de ordem par de N da esquerda para a direita. Por exemplo, $I(249035) = 405$ e $P(249035) = 293$. Provar que não é possível encontrar um natural N de $2k$ algarismos tal que $N = I(N).P(N)$.