36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA
Sábado, 25 de outubro de 2014

PROBLEMA 1

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

PROBLEMA 2

Encontre todos os inteiros n, $n > 1$, com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

PROBLEMA 3

Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leq k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leq m \leq 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.

Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA
Domingo, 26 de outubro de 2014

PROBLEMA 4

Uma sequência infinita de polinômios $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, … é definida por

$$P_0(x) = x \quad \text{e} \quad P_n(x) = P_{n-1}(x - 1) \cdot P_{n-1}(x + 1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Determine o maior inteiro k para o qual o polinômio $P_{2014}(x)$ é múltiplo de x^k.

PROBLEMA 5

Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é tomar três casas formando um L-triminó (ou seja, uma casa C e outras duas casas com um lado em comum com C, um na horizontal e outro na vertical) e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de m, n e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.

PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω. O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2, respectivamente. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYZ e I são colineares.