XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível U

Algumas Técnicas com Funções Geratrizes

Davi Lopes

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

Algumas Técnicas com Funções Geratrizes

Davi Lopes – Nível U – Semana Olímpica 2016

1. Funções Geratrizes e Sequências

01. Utilizando funções geratrizes, encontre "fórmulas fechadas" para as seguintes sequências:
   (a) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$ (Sequência de Fibonacci)
   (b) $t_0 = t_1 = 1, t_{n+2} = -2t_{n+1} - 4t_n$ para $n \geq 0$
   (c) $p_0 = p_1 = 1, p_2 = 0, p_{n+3} = 7p_{n+1} - 6p_n$ para todo $n \geq 0$
   (d) $y_0 = 1$, $y_n = ay_{n-1} + b^n, n \geq 1$ (a e b são constantes).
   (e) $a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + n$ pra $n \geq 1$.
   (f) $b_0 = 2, b_1 = 6, b_2 = 17, b_3 = 30, b_{n+4} = 3b_{n+3} - b_{n+2} - 3b_{n+1} + 2b_n$

02. (a) Para $r \in \mathbb{N}$, seja $a_r = \frac{1}{4^r}\binom{2r}{r}$. Mostre que a função geratriz para a sequência (a_r) é dada por $(1-x)^{-1/2}$.
   (b) Usando que $(1-x)^{-1} = (1-x)^{-1/2}.(1-x)^{-1/2}$, prove que, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} . \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

03. Prove que, para $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=1}^{n} r \binom{n}{r} \binom{m}{r} = n \binom{n+m-1}{n}$$

04. Demonstre que, para todos $k, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

05. Demonstre que, para todos os números $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$:

$$\sum \left[\binom{a_1}{x_1} \binom{a_2}{x_2} \dots \binom{a_n}{x_n} \right] = \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

   Onde o somatório é considerado sobre todas as soluções $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

06. Calcule o valor da soma:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m}$$

07. Simplifique a expressão abaixo:

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \dots + \binom{n+m}{k}$$

08. Sendo F_n a sequência de Fibonacci, demonstre que:
   (a) $F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$

(b) $\binom{n}{n}F_0 + \binom{n}{n-1}F_1 + \binom{n}{n-2}F_2 + \ldots + \binom{n}{0}F_n = F_{2n}$

09. (a) Mostre que o número de triangulações T_n (por diagonais que não se interceptam fora dos vértices) de um polígono convexo de n vértices satisfaz $T_2 = 1$ e para $n \geq 2$:

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \ldots + T_nT_2$$

(b) Prove que $T(x) = T_2 + T_3x + T_4x^2 + \ldots = \dfrac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x}$

(c) Mostre que $T_n = \dfrac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n-1}$(Números de Catalan).

10. Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \pi/3$ e, para $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots a_na_0)}{3(n+1)}$$

Calcule:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots$$

2. Modelagem Combinatória, Partições

11. Um candidato presta um exame de 4 provas. Cada prova tem no máximo m pontos, e cada prova pode ter uma pontuação inteira positiva. Mostre que numero de maneiras de se obter um total de 2m pontos é $\frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$
12. Prove que o conjunto de sequências binárias (isto é, sequências formadas apenas com zeros e uns) de comprimento n que contém exatamente m ocorrências do tipo 01 é igual a $\binom{n+1}{2m+1}$.
13. (Putnam 2000) Seja S_0 um conjunto finito de inteiros positivos. Definimos os conjuntos S_1, S_2, ... de inteiros positivos como segue: o inteiro a está em S_{n+1} se, e somente se, exatamente um dentre $a-1$ ou a está em S_n. Mostre que existem infinitos inteiros N para os quais $S_N = S_0 \cup \{N + a | a \in S\}$.
14. Para um dado inteiro n > 1, duas n-uplas distintas de inteiros $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ e $(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ tais que as sequências de somas:

$$a_1 + a_2;\ a_1 + a_3; \ldots; a_{n-1} + a_n$$

E

$$b_1 + b_2; b_1 + b_3; \ldots; b_{n-1} + b_n$$

Coincidem a menos de uma permutação. Mostre que n é uma potência de 2.

15. Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência crescente de inteiros não negativos, de tal modo que todo inteiro não negativo pode ser expresso unicamente na forma $a_i + 2a_j + 4a_k$ onde i, j e k são não necessariamente distintos. Determine a_{1998}.
16. Prove que o numero de partições de n em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte aparece mais do que três vezes.
17. Para cada número n, seja $f(n)$ a quantidade de maneiras em que se pode expressar n como soma de números iguais a 1, 3 ou 4, onde a ordem das parcelas importa. Por exemplo, $f(4) = 4$, pois todas as maneiras possíveis são:

$$4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Demonstrar que se n é par, $f(n)$ é um quadrado perfeito.

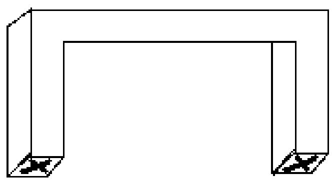
18. Prove que o número de partições de n em que cada parte aparece 2, 3 ou 5 vezes é o mesmo número de partições de n em que cada parte pertence ao conjunto

$$P = \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 2, 3, 6, 9 \; ou \; 10 \; (mod \; 12)\}$$

19. Mostre que o número total de 1's nas partições de n é igual à soma dos números de partes distintas em cada partição de n.
20. Se $p(n)$ é o número de partições de n, prove que $p(n) - p(n-1)$ é o número de partições de n onde cada parte é estritamente maior que 1.

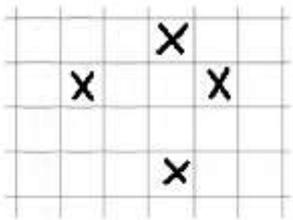
3. Tabuleiros, Complexos e Raízes da Unidade

21. Um triminó é um retângulo 3×1 (ou 1×3, bastando para isso rotacionar a peça 3×1). Um monominó é um único quadrado 1×1. Determine o numero de maneiras de se cobrir um tabuleiro 8×8 usando 21 triminós e 1 monominó.
22. Sejam m e n inteiros positivos. Suponha que um dado retângulo pode ser coberto por uma combinação de peças horizontais $1 \times m$ e peças verticais $n \times 1$. Prove que ele pode ser coberto usando somente um dos dois tipos.
23. Maria possui uma barra de chocolate mxn dividida em quadradinhos $1x1$. Ela deseja marcar cada uma das casinhas usando o seguinte instrumento de marcação:



A peça pode ser usada na horizontal ou na vertical. Ela marca duas casas deixando entre elas duas casas com distância $d - 1$ sem serem alteradas e não é permitido marcar um quadradinho mais que uma vez. Para que valores de m, n e d é possível fazer a marcação de todas os quadradinhos seguindo estas condições.

Obs: Exemplo de marcação com $d = 3$, usando uma vez na vertical e uma na horizontal.



24. Um L-trominó é obtido retirando o quadrado inferior direito de um quadrado 2×2. De quantas maneiras podemos colocar k peças L-trominós em um tabuleiro 3×n? Não é permitido rotações sem sobreposições dos trominós.
25. Um L-trominó é obtido retirando o quadrado inferior direito de um quadrado 2×2. De quantas maneiras podemos colocar k peças L-trominós em um tabuleiro 3×n? Não é permitido rotações sem sobreposições dos trominós.
26. Encontre o número de subconjuntos de $\{1,2,3,\ldots,2000\}$ tal que a soma dos seus elementos é divisível por 5.
27. Seja p um primo impar. Encontre o número de subconjuntos de $\{1; 2; \ldots; p\}$ com a soma de seus elementos divisível por p.
28. A sequência finita a_1, a_2, ..., a_n é chamada p-balanceada se qualquer soma da forma $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \cdots$ é a mesma para qualquer $k = 1,2,\ldots,p$. Prove que se a sequência com 50 membros é p-balanceada para $p = 3; 5; 7; 11; 13; 17$ então todos estes números são iguais a zero.
29. (IMO/1995) Seja p um primo ímpar. Encontre o número de subconjuntos A do conjunto $\{1,2,\ldots,2p\}$, tais que:

    1. A tem exatamente p elementos;

    2. A soma de todos os elementos de A é divisível por p.

30. Seja H_1 um polígono de p lados, sendo p primo. A sequência de polígonos $H_1, H_2, \ldots, H_p$ é construída da seguinte maneira: dado o polígono H_k, H_{k+1} é obtido refletindo cada vértice de H_k em relação ao seu k-ésimo vértice vizinho, contando no sentido anti-horário. Prove que H_1 e H_p são polígonos semelhantes.
31. Considere o conjunto $A = \{1,2,\ldots,2015\}$. Pinte cada número do conjunto A com uma das três cores: verde, amarelo ou azul. Defina os conjuntos:

$$A_1 = \{(x,y,z) \in A \mid x,y,z \text{ possuem a mesma cor e } 2015 \mid (x+y+z)\}$$
$$A_2 = \{(x,y,z) \in A \mid x,y,z \text{ possuem três cores distintas e } 2015 \mid (x+y+z)\}.$$

    Prove que $2|A_1| > |A_2|$.
32. Para um inteiro positivo n, denote por $S(n)$ o número de escolhas de sinais $+$ ou $-$ de modo que $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n = 0$. Prove que:

$$S(n) = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(2t)\ldots\cos(nt)\,dt$$