XIX Semana Olímpica de Matemática

Nível U

Grupos, Ações, Contagens e o Lema de Burnside

Davi Lopes

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

Grupos, Ações, Contagens e o Lema de Burnside

Davi Lopes – Nível U – Semana Olímpica 2016

Problema 1: Uma roleta circular possui p seções de mesmo tamanho (p é um primo), e cada seção é colorida de uma dentre n cores. Prove que o número de roletas circulares possíveis, desconsiderando rotações, é igual a $\frac{n^p+n(p-1)}{p}$.

Problema 2: De quantas maneiras é possível formar um colar circular usando três contas pretas e três contas brancas, se:

(a) Não há dois colares equivalentes;
(b) Dois colares são equivalentes se é possível obter um a partir da rotação do outro;
(c) Dois colares são equivalentes se é possível obter um a partir da rotação e/ou reflexão do outro;

Problema 3 (AIME – Adaptado): Chiquinha quer comprar um bracelete. Cada bracelete possui 7 miçangas, dispostas de maneira circular, e cada miçanga possui uma dentre 3 cores: laranja, branco e preto. Quantos braceletes Chiquinha pode comprar, se:

(a) Dois braceletes são iguais se é possível obter um a partir da rotação do outro;
(b) Dois braceletes são iguais se é possível obter um a partir da rotação e/ou reflexão do outro;

Problema 4: De quantas maneiras podemos pintar um tabuleiro $n \times n$, sendo que cada casinha pode ter uma de k cores? Duas pinturas são considerados iguais quando uma pode ser obtido a partir da outra através de uma rotação.

Problema 5: De quantas podemos pintar os vértices de um tetraedro regular, se temos n cores disponíveis? Pinturas que podem ser obtidas através de movimentos rígidos do cubo devem ser consideradas iguais.

Problema 6: De quantas podemos pintar os vértices de um cubo, se temos n cores disponíveis? Pinturas que podem ser obtidas através de movimentos rígidos do cubo devem ser consideradas iguais.

Problema 7: De quantas podemos pintar as faces de um cubo, se temos n cores disponíveis? Pinturas que podem ser obtidas através de movimentos rígidos do cubo devem ser consideradas iguais.

Problema 8: Hipoteticamente, quantas moléculas diferentes podemos formar com um átomo de carbono e radicais de hidrogênio (−H), metil (−CH3), etil (−C2H5) e cloro (−Cℓ)? Cada radical pode ser utilizado quantas vezes forem necessárias (ou seja, de 0 a 4 vezes).

Problema 9: Prove que para todo $n, k \in \mathbb{N}$, $k | \sum_{m=0}^{k-1} n^{mdc(k,m)}$.

Problema 10 (IMC): Denote por S_n o grupo das permutações de $\{1,2,\dots,n\}$. Suponha que G é um subgrupo de S_n tal que para todo $\pi \in G, \pi \neq e$ (e é a identidade de G), existe um único índice $k \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $\pi(k) = k$. Mostre que este k é o mesmo para todo $\pi \in G, \pi \neq e$.