

## Matemática: Culpada ou Inocente?

Semana Olímpica - OBM 2009

Raul Ribeiro

### Probabilidade

- uma probabilidade é um número entre 0 e 1;
- a probabilidade de um evento ou proposição e seu complemento, se somados, valem 1;
- a probabilidade de 2 eventos independentes é o produto da probabilidade de cada um.

### Teorema de Bayes

- $\Pr(A)$  e  $\Pr(B)$ : probabilidades a priori ;
- $\Pr(B|A)$  e  $\Pr(A|B)$ : probabilidades a posteriori de X condicional Y ;
- A regra de Bayes mostra como levar em conta novas evidências de forma a obter probabilidades a posteriori.

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

- a **probabilidade conjunta** de dois eventos ou proposições é o produto da probabilidade de um deles e a probabilidade do segundo, **condicionado** na primeira.

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) \Pr(A) = \Pr(A|B) \Pr(B)$$

### Lei dos Grandes Números

Se um evento de probabilidade  $p$  é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total numero de repetições converge em direção a  $p$  à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.

Mais simplesmente, conforme um experimento é repetido várias vezes, a probabilidade observada se aproxima da presente (ou real) probabilidade.

### Casos Jurídicos

#### **1- Suprema Corte da Califórnia**

- 18/06/64 ao redor das 11h30, Sra Juanita Brooks voltava para casa por uma travessa na região de San Pedro, Los Angeles. Foi empurrada para o chão e teve a bolsa roubada. Enxergou uma mulher de cerca de 70kg com cabelo loiro.
- Jonh Bass, que vivia numa rua ao fim da travessa, viu uma mulher fugir correndo e entrar num carro amarelo, entre médio e grande, com um motorista negro de barba e bigode.

Polícia de Los Angeles:

- Prendeu após alguns dias Malcolm Ricardo Collins e sua mulher Janet por possuírem um carro amarelo e ambos terem o perfil descrito pela vítima.
- Para sustentar a prisão, a acusação apresentou a corte um professor assistente de matemática de uma faculdade estadual com alguns dados de probabilidade.

• Automóvel amarelo	1/10
• Homem com bigode	1/4
• Homem negro com barba	1/10
• Garota com rabo de cavalo	1/10
• Garota loira	1/3
• Casal inter-racial	1/1000
• Total coincidência	1/12.000.000

RESULTADO: JURI CONDENA CASAL

Erros matemáticos no julgamento:

- Probabilidades devem ser independentes para permitira multiplicação, isto é, sabemos que na população abaixo não podemos multiplicar, pois a maioria das pessoas que possuem barba, também possuem bigode:

- Homem negro com barba  $1/10$
- Homem com bigode  $1/4$
- Homem negro com barba e bigode não é  $1/40$ , mas sim algo em torno de  $1/15$
- Probabilidade cai para  $1/1.000.000$

- Sabendo que apenas na região próxima ao crime temos 3 milhões de pessoas

morando, a probabilidade que este casal seja culpado é de  $1/3!!!$

- Suprema corte revoga condenação no caso Collins

- Uso da matemática é ridicularizado

## 2 - Tribunal de Oklahoma (1993)

- Timothy Durham é condenado por estupro e roubo baseado no exame de DNA

- A probabilidade que alguém tenha um DNA semelhante ao encontrado na cena do crime é de  $1/1.000.000.000$

- 11 testemunhas afirmaram que ele estava em outro estado no momento do crime, dia 31/05/91

- Condenado a 3.200 anos de prisão

Após quase 4 anos preso:

- Durham, que sempre alegou inocência, consegue uma revisão nos testes de DNA que revelam que o Laboratório de Criminologia da cidade de Filadélfia não foi capaz de separar completamente o DNA do estuproador e da vítima
- Durham é inocentado e espera ainda a indenização do Estado
- Erros como esse tem  $1/100$  de chance de acontecer

## 3 - Caso Sally Clark

Condenada em 11/1999 pelo assassinado dos seus dois filhos, Christopher em 1996, e Harry em 1998, ambos com poucas semanas de vida.

- Foi interposto recurso mas a condenação foi confirmada, em 10/2000.

- Professor Sir **Roy Meadow**, um **pediatra** da **Universidade de Leeds** que testemunhou: "uma morte súbita na infância é uma tragédia para a família, duas são suspeitas e três são assassinio a menos que existam provas em contrário".

- Afirmou ainda que a hipótese de duas crianças de uma família abastada de não fumadores sofrerem de "síndrome de morte súbita" era de 1 em 73 milhões.

- Só foi inocentada num segundo apelo, em 01/2003, pois a **Royal Statistical Society** escreveu ao "Lord Chancellor" em 10/2000, afirmando que não havia bases estatísticas para o cálculo de Meadow.

- O professor havia multiplicado as probabilidades  $1/8544$  de cada caso, como se fossem eventos independentes.

- O caso foi remetido para o "**Court of Appeal of England and Wales**" depois de terem sido encontradas evidências de uma infecção com bactéria no cérebro de Harry.

- O patologista da acusação, Alan Williams, sabia desde 02/1998, mas não disse a defesa de Clark

Libertada após 3 anos presa

- Nunca se recuperou

- Foi encontrada morta em 15/03/2007 enquanto o seu marido, Steve, que nunca a abandonou, encontrava-se em viagem de negócios na França

#### 4 - O. J. Simpson

- Acusado de matar sua ex-mulher e seu namorado
- Cobertura intensa da mídia entre 1994 e 1995
- Acusação decide concentrar no fato dele ter espancado a ex-mulher

Defesa rebate com os números:

- 4 milhões de mulheres são espancadas anualmente nos EUA
- 1432 dessas mulheres foram assassinadas por seu companheiro
- Logo  $1/2500$  é a chance de alguém que bate na mulher realmente matá-la
- Acusação não soube rebater esses dados pois desconhecia a lei de Bayes
- $1/2500$  é a probabilidade de alguém que bate na mulher, um dia matá-la
- Verdade? Sim. Convincente? Sim. Relevante? Não.
- O próprio FBI diz que das mulheres que eram espancadas e morreram assassinadas, 90% foram mortas pelos companheiros espancadores.

#### Exercícios

1 – Você tem um casal de amigos que possuem dois filhos, cujo sexo você não lembra.

- a-) Qual é a probabilidade de ambas serem meninas?
- b-) Você consultou sua esposa, e ela lhe disse que um dos filhos é certamente uma menina. Qual é a probabilidade de ambas serem meninas?
- c-) Você consultou sua agenda e viu que uma dos filhos do casal se chama Felizberta. Sabendo que o nome Felizberta só é colocado no Brasil e uma a cada 1 milhão de crianças, qual é a probabilidade de ambas serem meninas?

2 – Leonard Mlodinow, doutor em Física por Berkeley, que leciona teoria da aleatoriedade no CalTec, foi diagnosticado em 1989 como portador de HIV em um teste que erra  $1/1000$ . O médico que deu o resultado acrescentou que Leonard teria portanto probabilidade de  $999/1000$  de realmente ser um portador de HIV (na época, isso significava morrer em menos de 10 anos).

Corrija o erro do médico e calcule a real probabilidade de ser um falso positivo, sabendo que, conforme estatísticas do centro de controle e prevenção de doenças dos Estados Unidos, apenas 1 em cada 10.000 homens possuía a doença em 1989.

3 – Um táxi atropelou uma pessoa à noite e fugiu. Duas empresas de táxi, a Verde e a Azul, operam na cidade. Você recebe os seguintes dados:

- (a) 85% dos táxis da cidade são da Verde e 15% são da Azul.
- (b) Uma testemunha identificou o táxi como sendo da Azul. O tribunal testou a confiabilidade da testemunha nas mesmas condições da noite do acidente e constatou que a testemunha identificou corretamente 80% das vezes e errou nos outros 20%.

Qual é a probabilidade de ser Azul, e não Verde, o táxi que se envolveu no acidente?

4 – Uma rifa é realizada com 100 pessoas comprando 1 papel cada. Na hora do sorteio bate uma forte rajada de vento e alguns papéis são perdidos. Podemos continuar e realizar o sorteio apenas entre os papéis que sobraram? Ou isso altera as probabilidades que cada um tem de ganhar?

5 – Qual o número mínimo de pessoas para que a chance de pelo menos duas terem a mesma data de aniversário seja maior que 50%?

## Desafios

1 - **Truelo:** 3 competidores disputam a vida da seguinte forma:

- O Adalberto acerta 1 tiro em cada 3 tentativas;
  - O Bedalberto acerta 2 tiros em cada 3 tentativas;
  - O Cedalberto acerta 3 tiros em cada 3 tentativas;
- O truelo começa pela ordem dos mais fracos (pra dar melhor chance a todos);  
A pergunta: Qual a melhor estratégia para o Adalberto vencer o Truelo?

2 - Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro?

3-Um móvel tem três gavetas iguais. Em uma gaveta há duas bolas brancas, em outra há duas bolas pretas, e na terceira há uma bola branca e outra preta. Abrimos uma gaveta ao acaso e tiramos uma bola ao acaso sem olhar a segunda bola que está na gaveta. A bola que tiramos é branca. Qual é a probabilidade de que a segunda bola que ficou sozinha na gaveta seja também branca?

4 – **Paradoxo do Carcereiro:** Abelardo, Bebelardo e Cebelardo estão presos. O carcereiro é o único a saber qual deles está condenado à morte e quais são os outros dois que serão libertados. Aberlardo escuta o carcereiro comentando que Bebelardo vai ser solto. Isso mudou a probabilidade de Abelardo morrer?

5 – **Paradoxo de Simpson:** “Uma associação em sub-populações pode estar revertida na população em si. Aparentemente, quando dois conjuntos de dados suportam separadamente a mesma hipótese, unidos eles suportam a hipótese inversa.” Você consegue pensar em algum caso?

## Bibliografia

- 1 – “O Andar do Bêbado”, Leonard Mlodinow
- 2 – “Aleatoriedade”, Deborah Bennett
- 3 – “COMO PERDER AMIGOS E ENGANAR PESSOAS” - Nicolau C. Saldanha
- 4 - RPM - WAGNER, E. Probabilidade geométrica - o problema do macarrão e um paradoxo famoso. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 34, p. 28.35, 1997.)