Nem Tudo Mudou...

Ramon Moreira Nunes

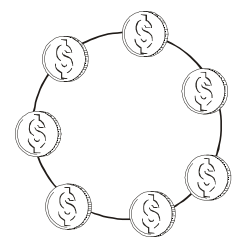
Invariantes, jogos e pinturas

PROBLEMA 1

Sete números naturais são escritos em círculo. Sabe-se que, em cada par de números vizinhos, um deles divide o outro. Mostre que há dois números não vizinhos com a mesma propriedade (isto é: um deles divide o outro).

PROBLEMA 2

Sete moedas estão dispostas em círculo, com a coroa visível.



a) Mostre que é possível, virando-se cinco moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.

b) Mostre que não é possível, virando-se quatro moedas consecutivas de cada vez, fazer com que todas fiquem com a cara visível.

PROBLEMA 3

Em um tabuleiro 8 × 8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

PROBLEMA 4

Os números 1,2,...,2009 estão escritos em um quadro branco. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no lugar. Após muitas operações ficamos com somente um número. Esse número pode ser zero?

PROBLEMA 5

Em uma li brica de cartoes existem tres maquinas. A primeira recebe um cartao (a, b) e retorna um FDUWmo (a + 1, b + 1). A segunda recebe um cartao (2a, 2b) e retorna um cartao (a, b). A terceira recebe dois cartoes (a, b) e (b, c) e retorna o cartao (a, c). Todas as m ãquinas tabem retornam o(s) cartao(oes) dado(s). E possivel fabricar um FDUWmo (1, 1988) se temos inicialmelmente apenas um cart ão (5, 19)?

PROBLEMA 6

As 42 crianças de uma escola infantil receberam um número cada e foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal).

Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora, Maria fez o desenho à esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado à direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado". Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?

	11	**20**				
	31					

(Desenho de Maria)

	11	**20**				
	31					

(Desenho de Célia)

PROBLEMA 7:

São dados um tabuleiro de xadrez (8 x 8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos. Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1 x 1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

PROBLEMA 8

Esmeralda escolhe um número inteiro positivo qualquer e realiza a seguinte operação com ele: cada um de seus algarismos é trocado pelo seu sucessor, com exceção do 9, que é trocado por 0. Em seguida, os eventuais zeros que aparecem à esquerda são eliminados. Por exemplo, ao se realizar a operação no número 990003953 obtém-se 1114064 (note que os dois zeros à esquerda gerados pelos dois primeiros algarismos 9 foram eliminados). A operação é repetida até que se obtenha 0. Por exemplo, começando com 889, obtemos a seqüência de números

889, 990, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

a) Apresente a seqüência de números quando o primeiro número é 20092009

b) Mostre que, independente do número inicial, após uma quantidade finita de operações Esmeralda obtém 0.

PROBLEMA 9

Tic e Tac jogam um jogo com 2010 cartas. Em cada carta está escrito um números inteiro positivo. As cartas são colocadas em fila, de modo que os números nas cartas estejam visíveis. Cada jogada consiste em escolher uma carta que esteja em uma das duas extremidades da fila e retirá-la. Tic começa o jogo e o jogo termina quando Tac retira a última carta da fila. A pontuação de cada jogador é a soma dos números nas cartas retiradas por ele. Demonstre que Tic pode sempre obter uma soma maior ou igual 'a de Tac.

PROBLEMA 10

Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro n x n. Cicero e Onofre jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Cicero consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2 x 2. Cada jogada de Onofre consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Cicero e Onofre jogam alternadamente, sendo Cicero o primeiro a jogar. Quando Cicero não puder fazer sua jogada, então Onofre fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se é possível que Onofre ganhe o jogo, não importando como Cicero jogue, em cada um dos seguintes casos:

a) n = 10.

b) Caso geral (n qualquer).