Prof. Bruno Holanda - Semana Olímpica 2011 - **Nível 1**

Treinamento Cone Sul

1.1 Teoria dos Números

Vamos listar agora uma série de propriedades da aritmética modular. Todas essas propriedades podem ser demonstradas facilmente a partir da definição. Por esse motivo, deixaremos as provas como exercício.

(i) $a \equiv a \pmod m$ e $ab \equiv ba \pmod m$.

(ii) $a \equiv b \pmod m$, então $b \equiv a \pmod m$.

(iii) Se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$, então $a \equiv c \pmod m$.

(iv) $a + x \equiv b + x \pmod m$ se e somente se $a \equiv b \pmod m$.

(v) $ax \equiv bx \pmod m$ e mdc(x, m)=1, então $a \equiv b \pmod m$.

(vi) Se $a \equiv b \pmod m$, então $a^k \equiv b^k \pmod m$.

Problema 1. (São Petersburgo 1998) Em quantos zeros pode terminar o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Mostre que $19 \cdot 8^n + 17$ é composto para todo n natural.

1.2 Princípio da Casa dos Pombos

O princípio da casa dos pombos também é conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como *Princípio de Dirichlet* pois, foi o matemático Lejeune Dirichlet o primeiro matemático a usa este método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa idéia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdős e Szekeres. Vamos abordar este princípio da seguinte maneira:

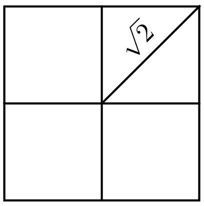
"Se em n caixas são postos $n + 1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

Agora vamos ver como algo tão simples pode resolver problemas aparentemente difíceis:

Problema 3. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Divida o quadrado em quatro quadrados menores como na figura ao lado. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal, o resultado segue de imediato.

$\square$



Passo de Mágica?
Para o aluno iniciante a solução do problema anterior pode ter parecida um pouco mágica. Vamos mostrar que não é bem assim, que existe um método na solução de alguns problemas simples que usam a idéia da casa dos pombos.

A primeira coisa que devemos aprender a reconhecer é quando um problema se trata de um problema sobre casa dos pombos. Isso pode ser ganho com experiencia, mas vamos dar um empurãozinho para você. Um problema de PCP tem quase sempre a seguinte cara:

Dado um conjunto de n **objetos**, prove que podemos escolher k deles satisfazendo uma **propriedade**.

Bem, depois de identificar que o enunciado do problema no traz a idéia de usar PCP, devemos nos concentrar em responder as seguintes perguntas:

i. Quem são os pombos?

ii. Quantas são as casas?

iii. Quem são as casas?

Quase sempre as duas primeiras perguntas são as mais fáceis de serem respondidas. Para responder a terceira pergunta devemos pensar no conceito dual de *espaço amostral*. Por um lado, o espaço amostral é o conjunto das possíveis posições dos pombos. Por outro, é a união de todas as casas.

Para finalizar, devemos separar o espaço amostral no número de casas já descoberto. Nessa hora é importante lembrar que as casas devem fletir a propriedade desejada.
Como acabamos de ver, usar o princípio da casas dos pombos não é difícil. O difícil está em achar o que serão nossos "pombos" e "caixas". O próximo problema é, *a priori*, um problema de teoria dos números. Porém, vamos usar o princípio da casa dos pombos para resolvê-lo.

Problema 4. (Longlist IMO 1979 - Bulgária) Colocamos $4n + 1$ reis em um tabuleiro infinito. Prove que podemos escolher $n + 1$ deles de modo que não existam dois que se ataquem.

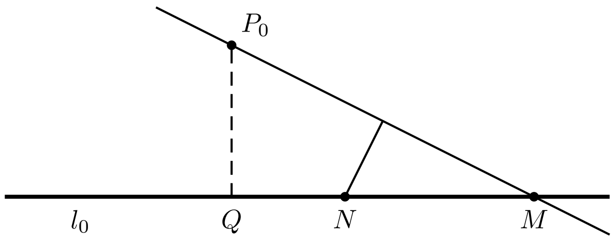
Problema 5. Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 24, 25\}$ é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Problema 6. (Torneio das Cidades 1989) Temos 101 retângulos distintos de papel de lados inteiros não maiores que 100 . Prove que podemos escolher três deles A, B e C de modo que A cobre B e B cobre C.

1.3 Princípio do Extremo

A idéia chave na solução de muitos problemas de combinatória, ou até mesmo em teoria dos números e álgebra é a simples consideração de um elemento extremo (máximo ou mínimo). O próximo problema mostrará como essa idéia pode ser simples e ao mesmo tempo poderosa.

Problema 7. (Teorema de Slyverstre) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a propriedade que qualquer reta que passa por dois destes pontos também passa por um terceiro. Prove que todos os pontos estão sobre uma reta.



Solução. Seja L o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Agora sejam $P_0 \in S$ e $l_0 \in L$ tais que a distância entre P_0 e l_0 é a menor possível porém, diferente de zero. Seja Q a projeção de P_0 sobre l_0. Como a reta l_0 passa por três deles, pelo menos dois deles N e M estão na mesma semi-reta (em relação a Q). Suponha que N é o mais próximo de Q desse modo, a distância entre N e a reta P_0M é menor que a mínima. Contradição. □

Problema 8. (Torneio das Cidades 1987)
(a) $3n$ estrelas são colocadas em um tabuleiro $2n \times 2n$. Prove que podemos eliminar n linhas e n colunas de modo que todas as estrelas sejam eliminadas.
(b) Prove que, com $3n + 1$ estrelas, isso não é mais possível.

Problema 9. (Leningrado 1989) Dado um número natural k maior que 1, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam potências de 2.