Álgebra: É Necessário ter Ideias para Fazer Contas?

A primeira e, de longe, mais importante lição é

1. Fatoração é legal; fatoração é sua amiga

1.1. Produtos notáveis; em especial, diferença de quadrados!

Você já deve conhecer os seguintes produtos notáveis:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.

Fatore x^4-y^4.

Resolução

$$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

Exemplo 1.2.

Fatore x^4+4y^4.

Resolução

Note que não temos fórmula para fatorar somas de quadrados (pelo menos sem ter que envolver números complexos). Mas somas de quadrados aparecem nas fórmulas do quadrado da soma e da diferença.

$$\begin{aligned}
x^4+4y^4 &= (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 2y^2+(2y^2)^2-4x^2y^2 \\
&= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\
&= (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)
\end{aligned}$$

Essa última fatoração é conhecida como *fatoração de Sophie Germain*.

Sophie Germain foi uma matemática que trabalhou especialmente em teoria dos números. Por que a fatoração leva seu nome? É porque fatorações são úteis para resolver váris problemas de teoria dos números.

Exemplo 1.3.

Mostre que $2^{2^{2010}}-1$ tem pelo menos 2010 fatores primos.

Resolução

É só fatorar:

$$2^{2^{2010}} - 1 = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)\dots(2^{2^{2009}}+1)$$

Você pode também provar que na verdade que esse número tem pelo menos 2010 fatores primos *distintos*, calculando o mdc entre quaisquer dois termos.

Exemplo 1.4.

(OBM 1995) Seja $P(n)$ o maior fator primo de n. Prove que existem infinitos n tais que

$$P(n-1) < P(n) < P(n+1)$$

Resolução

Tome $n = p^{2^k}$, p primo. Então $P(n) = p$. Tome o menor valor de k tal que $P(n+1) > p$, ou seja, tal que $P(p^{2^k}+1) > p$. Isso quer dizer que para todo $\ell < k$ temos $P(p^{2^\ell}+1) < p$. Agora note que

$$n - 1 = p^{2^k} - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)\dots(p^{2^{k-1}}+1)$$

Como todos os fatores primos de $n-1$ são menores do que p (inclusive os de $p-1$, que é menor do que p), $P(n-1) < p$ e terminou, certo?

Não tão rápido! Precisamos provar que k existe. Para isso, basta ver que o mdc de dois números da forma $p^{2^a}+1$ e $p^{2^b}+1$ é 2, e portanto uma hora $n-1$ vai ter mais do que p fatores primos, e algum deles é maior do que p. De fato, se $d \mid p^{2^a}+1$ e $\mid p^{2^b}+1$, $a > b$, então $p^{2^b} \equiv -1 \pmod{d} \implies (p^{2^b})^{2^{a-b}} \equiv 1 \pmod{d} \iff p^{2^a} \equiv 1 \pmod{d} \implies -1 \equiv 1 \pmod{d} \iff d \mid 2$.

1.2. Substituições espertas

Exemplo 1.5.

Fatore $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$.

Resolução

Se $a = x - y$ e $b = y - z$ então $z - x = -a - b$. Então

$$\begin{aligned}(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= a^3 + b^3 + (-a-b)^3 \\ &= a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \\ &= -3ab(a+b) = 3(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

Motivado por esse exemplo, temos a seguinte fatoração, que é importante:

Exemplo 1.6.

Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Resolução

Acabamos de ver que

$$a^3 + b^3 + (-a-b)^3 = -3ab(a+b) \iff a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Então

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc \\ &= ((a+b)+c)((a+b)^2-(a+b)c+c^2)-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2+2ab+b^2+c^2-ac-bc-3ab) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \end{aligned}$$

O segundo fator pode ser escrito de modo mais "bonitinho", se você observar que

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$

ou seja,

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

Depois veremos outra maneira de obter essa fatoração.

2. $A^2 \geq 0$

Essa desigualdade é simples, mas é muito importante se bem usada. Observe os seguintes exemplos:

Exemplo 2.1.

Prove que, para x real positivo,

$$x+\frac{1}{x} \geq 2$$

Resolução

Basta observar que, sendo x positivo,

$$x+\frac{1}{x} \geq 2 \iff x^2+1 \geq 2x \iff (x-1)^2 \geq 0$$

Assim, a desigualdade é verdadeira e a igualdade ocorre se, e somente se, $x=1$. ∎

Essa última desigualdade é bastante útil!

Exemplo 2.2.

Sejam $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ reais. Mostre que

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq x_n+2n$$

Quando ocorre a igualdade?

Resolução

Sejam $a_1 = x_0-x_1$, $a_2 = x_1-x_2$, $\ldots$, $a_n = x_{n-1}-x_n$. Note que todos os a_i's são positivos e $a_1+a_2+\cdots+a_n = x_0-x_n$. Assim, passando x_n para o primeiro membro, a desigualdade é equivalente a

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq 2n$$

Mas para obter essa desigualdade basta somar as desigualdades

$$a_1+\frac{1}{a_1} \geq 2, \quad a_2+\frac{1}{a_2} \geq 2, \quad \ldots, \quad a_n+\frac{1}{a_n} \geq 2$$

∎

Exemplo 2.3.

Mostre que

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2 \geq 0$$

para x, y, z reais.

Resolução

Note que $(x+y)(x+z) = x(x+y+z)+yz$. Logo

$$\begin{aligned} 4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2 &= 4x(x(x+y+z)+yz)(x+y+z)+y^2z^2 \\ &= (2x(x+y+z))^2 + 2\cdot 2x(x+y+z)\cdot yz + (yz)^2 \\ &= (2x(x+y+z)+yz)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

∎

Exemplo 2.4.

Prove que, para todo x real,

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x \leq 1$$

Resolução

Note que $9^x = (3^x)^2$, $4^x = (2^x)^2$ e $6^x = 2^x \cdot 3^x$. Então, sendo $a = 2^x$ e $b = 3^x$, a desigualdade é equivalente a

$$a + b - a^2 + ab - b^2 \leq 1 \iff a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geq 0$$

A ideia é completar quadrados em "etapas". De fato:

$$\begin{aligned} a^2+b^2-ab-a-b+1 &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - a - b + 1 \\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a^2-2a+1) + \frac{1}{2}(b^2-2b+1) \\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

∎

3. Combinatória ajuda a fazer contas!

Saber um pouco de Combinatória pode ser muito útil para abrir expressões grandes.

Exemplo 3.1.

Desenvolva $(a+b+c+d)^3$.

Resolução

Observando que

$$(a+b+c+d)^3 = \underbrace{(a+b+c+d)}_{(I)}\underbrace{(a+b+c+d)}_{(II)}\underbrace{(a+b+c+d)}_{(III)}$$

e que cada termo do produto consiste em produtos de três termos, um de cada parêntesis, temos os seguintes termos:

- os do tipo x^3, que são obtidos multiplicando três x's;

- os do tipo x^2y, que são obtidos multiplicando dois x's e um y; como há três maneiras de escolher de onde vem y (de (I), (II) ou (III) – por exemplo, a^2b aparece em aab, aba e baa), eles aparecem de três em três;
- os do tipo xyz, que são obtidos multiplicando um de cada variável; como há três maneiras de escolher de onde vem x, duas maneiras de escolher de onde vem y e uma maneira de escolher de onde vem z, eles aparecem de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ em 6.

Assim,

$$(a+b+c+d)^3 = a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+a^2c+a^2d+b^2a+b^2c+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c)$$
$$+6(abc+abd+acd+bcd)$$

4. Polinômios simétricos

Se você desenvolver $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$ vai notar que aparecem a soma e o produto de a e b. Se a soma e o produto dos números a e b são mais tratáveis, vale a pena usá-los no lugar de a e b.

Exemplo 4.1.

Calcule

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$$

Resolução

Você pode elevar $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ repetidamente ao quadrado, mas essa tarefa parece um bocado aborrecida. Usar polinômios simétricos pode diminuir significativamente as contas!

Sejam $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $a+b = 1$ e $ab = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1^2-(\sqrt{5})^2}{4} = -1$. Deste modo, para $x = a$ ou $x = b$,

$$(x-a)(x-b) = 0 \iff x^2-(a+b)x+ab = 0 \implies x^n = (a+b)x^{n-1} - abx^{n-2}$$

Substituindo x por a e b, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} a^n = (a+b)a^{n-1} - ab \cdot a^{n-2} \\ b^n = (a+b)b^{n-1} - ab \cdot b^{n-2} \end{array} \right. \implies a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) - ab(a^{n-2}+b^{n-2})$$

Substituindo $a+b = 1$ e $a+b = -1$ obtemos

$$a^n + b^n = (a^{n-1}+b^{n-1}) + (a^{n-2}+b^{n-2})$$

Sendo $a^k + b^k = S_k$, obtemos

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

Queremos S_{10}. Observando que $S_0 = a^0 + b^0 = 2$ e $S_1 = a^1 + b^1 = 1$, temos

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + S_0 = 3 \\ S_3 &= S_2 + S_1 = 4 \\ S_4 &= S_3 + S_2 = 7 \\ S_5 &= S_4 + S_3 = 11 \\ S_6 &= S_5 + S_4 = 18 \\ S_7 &= S_6 + S_5 = 29 \\ S_8 &= S_7 + S_6 = 47 \\ S_9 &= S_8 + S_7 = 76 \\ S_{10} &= S_9 + S_8 = 123 \end{aligned}$$

Um *polinômio simétrico* em várias variáveis é um polinômio que não muda se trocarmos quaisquer duas variáveis entre si. Por exemplo, $a^3 + b^3 - 2ab^2 - 2a^2b$ é um polinômio simétrico mas $x + 2y + z$ não é (se trocarmos x e y a expressão fica $y + 2x + z$, que é diferente da original).

A soma e o produto de dois números são os *polinômios simétricos elementares* desses dois números. Pode-se provar que qualquer polinômio simétrico de duas variáveis pode ser escrito em função dos dois polinômios simétricos desses números.

Como isso generaliza para mais variáveis? Observe que $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$ (utilize a Combinatória para desenvolver essa conta!). Então dizemos que os polinômios simétricos elementares de três variáveis são $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ac$ e $\sigma_3 = abc$. A letra σ é grega e se lê "sigma".

Vamos fatorar $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ novamente como exemplo.

Exemplo 4.2.

Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Resolução

Observe que $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$. Assim, substituindo x por a, b e c obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{array}{l} a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ac)a - abc = 0 \\ b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ac)b - abc = 0 \\ c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ac)c - abc = 0 \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ac)(a+b+c) \\
&\Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac)
\end{aligned}$$

O próximo exemplo usa uma mistura de algumas das técnicas que vimos. Utilizaremos livremente as notações para σ_1, σ_2 e σ_3.

Exemplo 4.3.

Sejam a, b e c números reais tais que

$$(bc - a^2)^{-1} + (ca - b^2)^{-1} + (ab - c^2)^{-1} = 0.$$

Prove que

$$a(bc - a^2)^{-2} + b(ca - b^2)^{-2} + c(ab - c^2)^{-2} = 0.$$

Resolução

Sejam $x = bc - a^2$, $y = ca - b^2$ e $z = ab - c^2$. Temos

$$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0 \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \iff \sigma_2 = 0$$

Note que estamos fazendo σ's de x, y e z.

Queremos provar que

$$ax^{-2} + by^{-2} + cz^{-2} = 0$$

Mas note que

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0 \iff x^3 = \sigma_1 x^2 + \sigma_3 \iff x = \sigma_1 + \sigma_3 x^{-2} \iff x^{-2} = \frac{x - \sigma_1}{\sigma_3}$$

Isso também vale para y e z. Assim,

$$ax^{-2} + by^{-2} + cz^{-2} = \frac{a(x - \sigma_1) + b(y - \sigma_1) + c(z - \sigma_1)}{\sigma_3}$$

Assim, queremos provar que

$$a(x - \sigma_1) + b(y - \sigma_1) + c(z - \sigma_1) = 0 \iff ax + by + cz = \sigma_1(a + b + c)$$

Substituindo x, y e z obtemos

$$\begin{aligned} & a(bc - a^2) + b(ca - b^2) + c(ab - c^2) = (bc - a^2 + ca - b^2 + ab - c^2)(a + b + c) \\ \iff & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac), \end{aligned}$$

que é algo que já sabemos que é verdade. ∎

Exercícios

01. Calcule (só no papel!)

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}$$

02. Fatore $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)$.

03. Sendo a, b, c racionais distintos, prove que

$$\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2}$$

é sempre o quadrado de um número racional.

04. Mostre a desigualdade de Schur: se x, y, z são reais não negativos e $r > 0$, então

$$x^r(x - y)(x - z) + y^r(y - z)(y - x) + z^r(z - x)(z - y) \geq 0$$

05. Mostre que, para todo n inteiro não negativo o número

$$5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

é composto.

06. Escreva $5^{1985} - 1$ como o produto de três inteiros, cada um maior do que 5^{100}.

07. Mostre que $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ não é primo.

08. Sejam x, y, z reais distintos. Mostre que

$$\sqrt[3]{x - y} + \sqrt[3]{y - z} + \sqrt[3]{z - x} \neq 0$$

09. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n^2$ e $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq n^3 + 1$. Prove que $n - 1 \leq a_k \leq n + 1$ para todo k.

10. Seja n um inteiro positivo par. Mostre que para cada x real existem pelo menos $2^{n/2}$ escolhas para os sinais $+$ e $-$ para os quais

$$\pm x^n \pm x^{n-1} \pm \cdots \pm x < \frac{1}{2}$$

11. Desenvolva $(a+b+c)^4$.

12. Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1$$

13. Resolva o seguinte sistema em reais:

$$\left|\begin{array}{l} x^4 + 2x^3 - y = -\dfrac{1}{4} + \sqrt{3} \\ y^4 + 2y^3 - x = -\dfrac{1}{4} - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

14. Encontre todos os ternos de reais (x, y, z) tais que

$$\left|\begin{array}{l} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27x + 27z \end{array}\right.$$

15. Resolva, em números reais, o sistema

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$
$$xyz = 1$$

16. Seja r um real positivo tal que $\sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}} = 14$. Prove que $\sqrt[6]{r} + \frac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6$.

17. Dado que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{11}$, qual é o valor de $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$?

18. Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$$

5. Referências bibliográficas

Muitos dos problemas foram extraídos do livro *Putnam and Beyond*, de Răzvan Gelca e Titu Andreescu.