# *Áreas e Aplicações em Geometria*


***Davi Lopes – Olimpíada Brasileira de Matemática***

***18ª Semana Olímpica – São José do Rio Preto, SP***

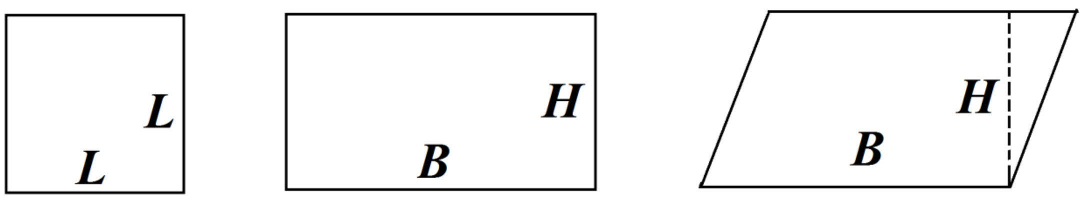

## *1. Introdução*

Nesse breve material, veremos uma rápida revisão sobre áreas das principais figuras planas, mas também exploraremos como as áreas podem nos ajudar em outros assuntos da geometria, como calcular e usar proporções entre segmentos, demonstrar o teorema de Pitágoras e mais ainda: usaremos tudo isso para encontrar uma fórmula que dá a área de um triângulo sabendo apenas as medidas de seus lados! Tá empolgado, amigo leitor? Não perca tempo e embarque nessa aventura pela geometria plana!

## *2. Fórmulas Famosas de Áreas*

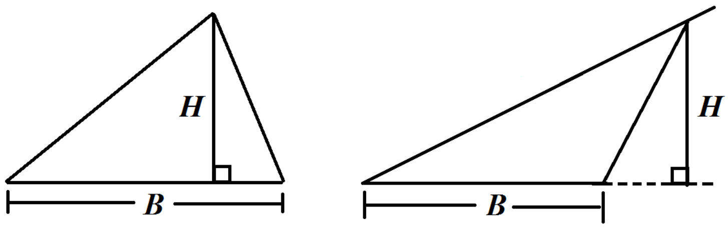
Vejamos inicialmente como se calcular áreas de algumas figuras notáveis. Não colocaremos a demonstração de cada uma delas aqui, mas você pode encontra-las facilmente na internet ou no livro do Matemática Elementar de geometria plana. Aqui, as letras B representarão as bases, a letra H representará a altura, a letra D, diagonal, e a letra S representará a área.

- ***Área do Quadrado, Retângulo e Paralelogramo***



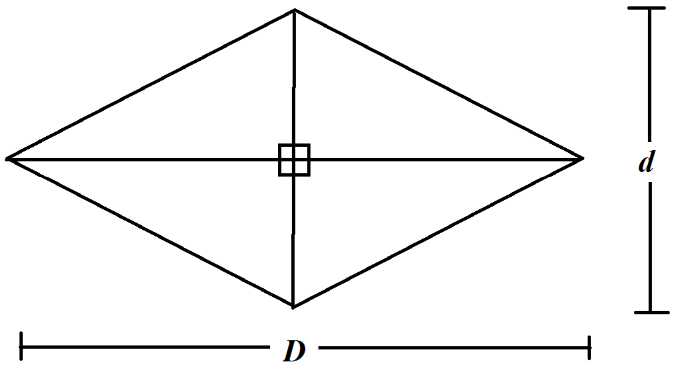

$S = L^2$ $\qquad$ $S = B.H$ $\qquad$ $S = B.H$

- ***Área do Triângulo***



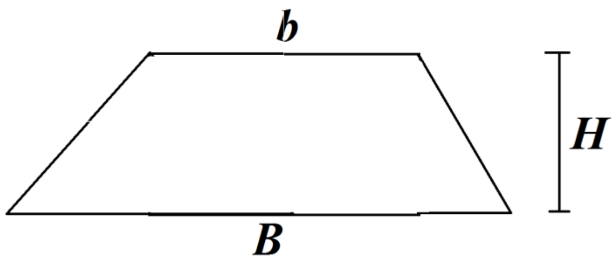

$$S = \frac{B.H}{2}$$

- ***Área do Losango***



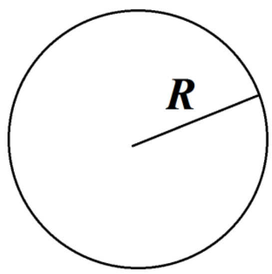

$$S = \frac{D.d}{2}$$

- ***Área do Trapézio***




$$S = \frac{(B + b).H}{2}$$

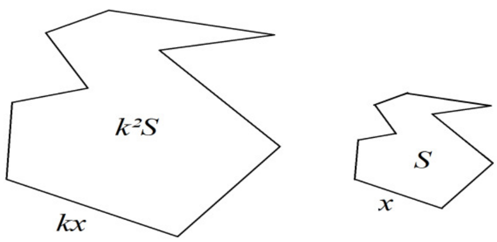
- ***Área do Círculo***




$$S = \pi.R^2$$

## *3. Áreas e Proporções entre Segmentos*

Um dos fatos mais simples, e ao mesmo tempo mais legais, sobre áreas é que, dadas duas figuras que são semelhantes, de razão $k$, a proporção entre suas áreas é igual a $k^2$. Assim, por exemplo, se um triângulo é o triplo do outro, sua área será nove vezes a área do outro.



Entretanto, será que essa é a única relação que podemos estabelecer entre figuras diferentes que compartilham algo em comum? Claro que não! Para exemplificar, vamos mostrar como se relacionam as áreas de triângulos que compartilham uma altura comum ou uma base comum.

No caso em que dois triângulos compartilham uma altura $h$ em comum (Figura 1), temos que se o primeiro triângulo possui base $b_1$ e o segundo triângulo possui base $b_2$:

$$\frac{Área(\Delta_1)}{Área(\Delta_2)} = \frac{\frac{b_1.h}{2}}{\frac{b_2.h}{2}} = \frac{b_1}{b_2} = Razão\ entre\ as\ bases$$

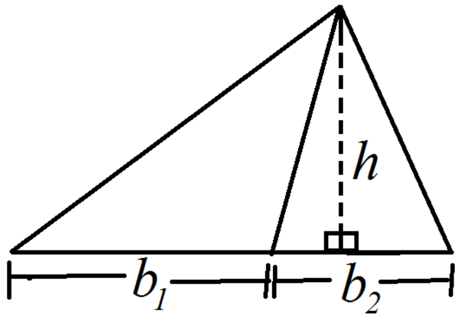


Figura 1

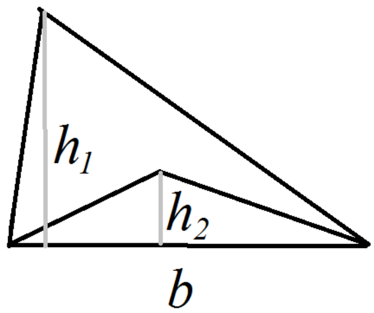


Figura 2

Já no caso em que dois triângulos compartilham uma base $b$ em comum (Figura 2), temos que se o primeiro triângulo possui altura $h_1$ e o segundo triângulo $h_2$:

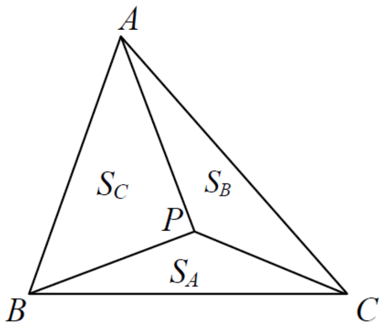
$$\frac{Área(\Delta_1)}{Área(\Delta_2)} = \frac{\frac{b.h_1}{2}}{\frac{b.h_2}{2}} = \frac{h_1}{h_2} = Razão\ entre\ as\ alturas$$

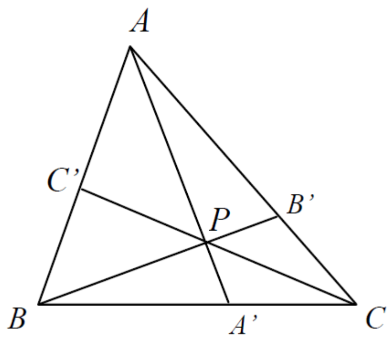
Daí, chegamos à conclusão de que as áreas de triângulos com uma altura comum possuem áreas diretamente proporcionais à base relativa a essa altura comum; e as áreas de triângulos com uma base comum possuem áreas diretamente proporcionais às alturas relativas a essa base comum. Essa regra, importantíssima para muitas coisas, nos servirá para explicar o método $K$... Mas que método é esse?

De uma maneira mais geral considere um triângulo $ABC$, e seja $P$ um ponto interior ao triângulo. Sejam $A'$, $B'$, $C'$ as interseções de $PA$, $PB$, $PC$ com $BC, CA, AB$, respectivamente. Sendo $S_A$, $S_B$, $S_C$ as áreas dos triângulos $PBC$, $PCA$, $PAB$, como encontrar, em função dessas áreas, as razões:

$$\frac{BA'}{A'C}; \frac{CB'}{B'A}; \frac{AC'}{C'B}; \frac{AP}{PA'}; \frac{BP}{PB'}; \frac{CP}{PC'};$$

E as áreas dos seis triângulos que as retas $AA'$, $BB'$, $CC'$ determinam no triângulo $ABC$?




Primeiro, observe que os triângulos $PBA'$ e $PA'C$ possuem uma altura em comum (a altura do vértice $C$), e que os triângulos $AA'B$ e $AA'C$ possuem também uma altura em comum (a altura do vértice $A$). Logo, pelo que vimos antes:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\acute{A}rea(ABA')}{\acute{A}rea(ACA')} = \frac{\acute{A}rea(PBA')}{\acute{A}rea(PCA')}$$

Agora, usando a importante regra de proporção $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x-z}{y-w}$, temos:

$$\frac{\acute{A}rea(ABA')}{\acute{A}rea(ACA')} = \frac{\acute{A}rea(PBA')}{\acute{A}rea(PCA')} = \frac{\acute{A}rea(ABA') - \acute{A}rea(PBA')}{\acute{A}rea(ACA') - \acute{A}rea(PCA')} = \frac{\acute{A}rea(ABP)}{\acute{A}rea(CAP)} = \frac{S_C}{S_B}$$

Logo a proporção $\frac{BA'}{A'C}$ é igual a $\frac{S_C}{S_B}$. Fazendo as contas da mesma maneira (ou como os matemáticos gostam de dizer, analogamente), temos que:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_C}{S_B}; \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_A}{S_C}; \qquad \frac{AC'}{C'B} = \frac{S_B}{S_A};$$

Agora, vamos calcular $\frac{AP}{PA'}$. Novamente, os triângulos $APC$ e $PA'C$ possuem uma altura em comum (a altura que parte de $C$) e os triângulos $APB$ e $PA'B$ também (a altura que parte de $B$). Então, suas áreas são proporcionais às bases correspondentes, donde:

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{\acute{A}rea(APB)}{\acute{A}rea(PBA')} = \frac{\acute{A}rea(APC)}{\acute{A}rea(PCA')}$$

Agora, usando outra importante regra de proporção $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$, temos:

$$\frac{\acute{A}rea(APB)}{\acute{A}rea(PBA')} = \frac{\acute{A}rea(APC)}{\acute{A}rea(PCA')} = \frac{\acute{A}rea(APB) + \acute{A}rea(APC)}{\acute{A}rea(PBA') + \acute{A}rea(PCA')} = \frac{S_C + S_B}{\acute{A}rea(BPC)} = \frac{S_B + S_C}{S_A}$$

Logo, a proporção $\frac{AP}{PA'}$ é igual a $\frac{S_B+S_C}{S_A}$. Analogamente (como eu adoro essa palavra!):

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{S_B + S_C}{S_A}; \qquad \frac{BP}{PB'} = \frac{S_C + S_A}{S_B}; \qquad \frac{CP}{PC'} = \frac{S_A + S_B}{S_C}$$

Por fim, conseguimos ainda achar as áreas dos seis triângulos menores, todos em função das três áreas dadas: Seja $x = Área(BPA')$ e $y = Área(CPA')$. Temos que $x + y = Área(BPC) = S_A$ e que $\frac{x}{y} = \frac{BA'}{A'C}$ (pois possuem altura comum). Como $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_C}{S_B}$, precisamos resolver o sistema (lembre-se: $S_A, S_B, S_C$ são constantes!):

$$x + y = S_A$$

$$\frac{x}{y} = \frac{S_C}{S_B}$$

Após algumas continhas, encontramos $x = \frac{S_A S_C}{S_B + S_C}$ e $y = \frac{S_A S_B}{S_B + S_C}$. Logo, fazendo a conta análogo para os outros 4 triângulos, chegamos que:

$$Área(BPA') = \frac{S_A S_C}{S_B + S_C}; \quad Área(CPA') = \frac{S_A S_B}{S_B + S_C}$$

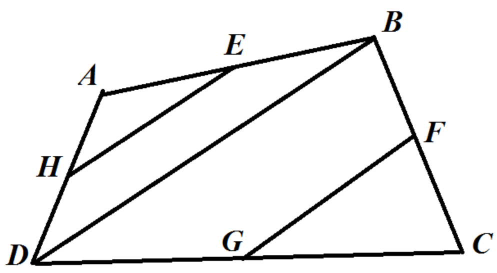
$$Área(CPB') = \frac{S_B S_A}{S_C + S_A}; \quad Área(APB') = \frac{S_B S_C}{S_C + S_A}$$

$$Área(APC') = \frac{S_C S_B}{S_A + S_B}; \quad Área(BPC') = \frac{S_C S_A}{S_A + S_B}$$

È ainda possível encontrar muitas outras coisas legais envolvendo áreas e proporções entre segmentos, mas se quisermos colocar tudo, colocaríamos praticamente a geometria plana aqui, e aí não teríamos mais um material, mas sim uma enciclopédia de milhares de páginas... mas que tal vermos algo interessante envolvendo quadriláteros?

## *4. Quadriláteros e Pontos Médios*

Quando consideramos um quadrilátero $ABCD$ convexo (ou seja, nenhum de seus ângulos internos é maior ou igual a 180º), e os pontos médios de seus lados ($E, F, G, H$ são pontos médios de $AB, BC, CD, DA$, respectivamente, como na figura), temos:




$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{HD} = \frac{1}{2} \text{ e } \angle DAB = \angle HAE$$

Assim, os triângulos $DAB$ e $HAE$ são semelhantes (razão $1/2$), donde $\angle EHA = \angle BDA$. Isso significa que $HE$ é paralelo à diagonal $BD$ (mais ainda: $HE$ é base média. Bases médias são uma parte importantíssima da geometria olímpica e o estudo delas é fundamental, mas isso fica para outro material). De modo semelhante, encontramos que $FG$ é paralelo a $BD$, e com isso, temos que $HE$ e $FG$ são paralelos.

Analogamente, $EF$ e $GH$ são paralelos. Portanto, $EFGH$ é um quadrilátero onde lados opostos são paralelos, ou seja, $EFGH$ é um paralelogramo!

Ah, saber que ele é um paralelogramo é bem legal, mas... até agora não vimos nada sobre áreas. Calma! Precisávamos ver que$EFGH$ era um paralelogramo para mostrar algo ainda mais legal: a área do paralelogramo $EFGH$ é igual à metade da área do quadrilátero $ABCD$! Para explicar porque isso é verdade, vamos voltar um pouco no que fizemos antes. Seja $S$ a área do quadrilátero $ABCD$.

Já vimos que os triângulos $DAB$ e $HAE$ são semelhantes (razão $1/2$). Daí, temos que:

$$\frac{Área(HAE)}{Área(DAB)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow Área(HAE) = \frac{Área(DAB)}{4}$$

De modo semelhante, os triângulos $DCB$ e $GCF$ são semelhantes (razão $1/2$). Daí:

$$\frac{Área(GCF)}{Área(DCB)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow Área(GCF) = \frac{Área(DCB)}{4}$$

Somando as duas expressões, vem:

$$Área(HAE) + Área(GCF) = \frac{Área(DAB) + Área(DCB)}{4} = \frac{S}{4}$$

Analogamente, temos que:

$$Área(EBF) + Área(HDG) = \frac{S}{4}$$

Logo:

$$Área(HAE) + Área(GCF) + Área(EBF) + Área(HDG) = \frac{S}{4} + \frac{S}{4} = \frac{S}{2} \Rightarrow$$

$$= Área(HAE) + Área(GCF) + Área(EBF) + Área(HDG) + Área(EFGH) =$$

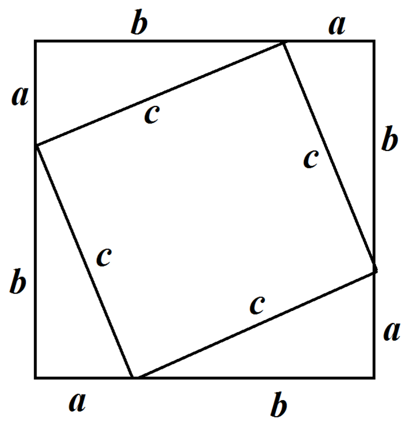
$$= \frac{S}{2} + Área(EFGH) \Rightarrow Área(ABCD) = \frac{S}{2} + Área(EFGH) \Rightarrow$$

$$S = \frac{S}{2} + Área(EFGH) \Rightarrow Área(EFGH) = \frac{S}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

## *5. Teorema de Pitágoras – Um Prova com Áreas*

Uma das provas mais interessantes do Teorema de Pitágoras, aquele que diz que num triângulo retângulo com catetos $a, b$ e hipotenusa $c$ têm-se $a^2 + b^2 = c^2$, usa apenas áreas, e usaremos a figura abaixo para fazê-la.




Considere o quadrado acima, de lado $(a + b)$, e decomponha-o em quatro triângulos retângulos, cada um de catetos $a, b$, e em um quadrado menor, de lado $c$. A área do quadrado maior, por um lado, é $(a + b)^2$. Por outro lado, a área do quadrado é a soma das áreas dos quatro triângulos menores (cada triângulo menor tem área $\frac{ab}{2}$), e do quadrado menor, que tem área $c^2$. Daí, igualando essas áreas:

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

*Observação:* Essa não é a única demonstração para o Teorema de Pitágoras usando áreas. Existem várias delas (inclusive uma delas feita por um ex-presidente dos EUA!), e não dá para colocar todas neste material, pois sabe-se que existem pelo menos 300 demonstrações dele, muitas delas usando áreas.

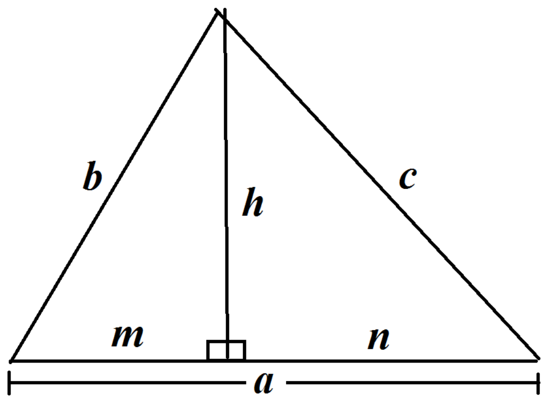
## *6. Uma Fórmula bem interessante: a Fórmula de Heron*

Usaremos o teorema de Pitágoras para encontrar um dos resultados mais interessantes sobre áreas na geometria plana: Dado um triângulo com lados $a, b, c$ é possível calcular sua área $S$ apenas em função dos três lados, sem usar nenhuma altura! A fórmula que relacionada área a lados de um triângulo é a *formula de Heron* e é dada por:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo. Vamos ver porque isso é verdade?

Na figura abaixo, temos um triângulo de lados $a, b, c$, uma altura de comprimento $h$, que divide o lado de medida $a$ em dois laods menores de medidas $m$ e $n$. Vamos descobrir primeiro os valores de $m, n$ e depois de $h$.




Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$b^2 = h^2 + m^2 \text{ e } c^2 = h^2 + n^2$$

Subtraindo essas duas equações, temos que $b^2 - c^2 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Como $m + n = a$, temos que $\frac{b^2-c^2}{a} = m - n$. Agora, temos um sistema:

$$m + n = a$$

$$m - n = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

Somando ambas as equações e dividindo por 2, obtemos $m = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$; subtraindo a segunda equação da primeira, e dividindo por 2, obtemos $n = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$. Agora, novamente pelo teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

Calma, não abra tudo! O segredo para se obter aquela fórmula bela é, ao invés de expandir o termo $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$ e depois tentar fatorar, fatorar primeiro como diferença entre dois quadrados para ver o que vai acontecer.

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) =$$

$$= \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) =$$

$$= \left(\frac{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2}{2a}\right)\left(\frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2a}\right) =$$

$$= \frac{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{(2a).(2a)} =$$

$$= \frac{\big((a+b+c)(a+b-c)\big)\big((c+a-b)(c-a+b)\big)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)((a+b+c)-2c)((a+b+c)-2b)((a+b+c)-2a)}{4a^2} =$$

$$= \frac{2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)}{4a^2} = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} =$$

$$= \frac{4}{a^2}[p(p-a)(p-b)(p-c)] \Rightarrow h^2 = \frac{4}{a^2}[p(p-a)(p-b)(p-c)] \Rightarrow$$

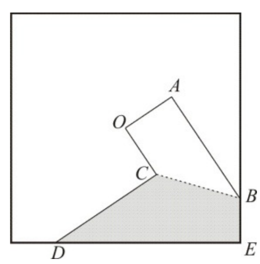
$$\Rightarrow \frac{a^2h^2}{4} = \left(\frac{ah}{2}\right)^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

E a fórmula de Heron está finalmente demonstrada.

## *7. Problemas*

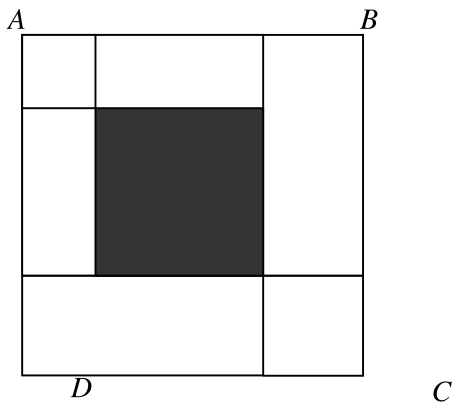
Pronto! Agora vocês possuem praticamente todas as ferramentas para se resolver problemas olímpicos envolvendo áreas em geometria (ainda falta ver relações entre áreas e senos de ângulos, mas isso fica para outro material), então nada melhor do que praticar tudo o que aprendemos!

***Problema 1:*** Na figura, $O$ é o centro do quadrado, $OA = OC = 2, AB = CD = 4$, $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{OC}$ que é perpendicular a $\overline{OA}$, que é perpendicular a $\overline{AB}$. A área do quadrado é 64 cm$^2$.



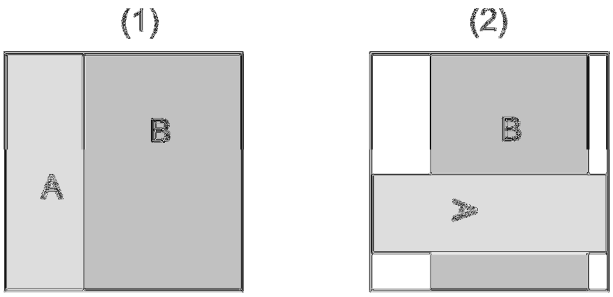

a) Calcule a área do trapézio *ABCO*.
b) Calcule a área do quadrilátero *BCDE*.

***Problema 2:*** Um quadrado de lado 12 foi dividido em sete regiões retangulares que não se sobrepõem, conforme a figura. Uma delas é um quadrado de vértice *C*, cuja área é metade da área de cada um dos dois retângulos vizinhos; outra é um quadrado de vértice *A*, cuja área é metade da área de cada um dos dois retângulos vizinhos.



a) Mostre que o quadrilátero destacado é um quadrado.
b) Calcule a área do quadrado destacado.

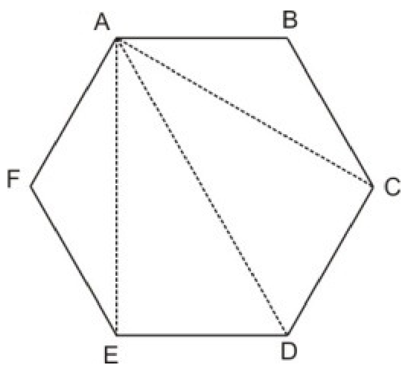
***Problema 3:*** Uma sala quadrada com 81 $m^2$ de área tem o seu piso inteiramente coberto por dois tapetes retangulares A e B, que não se superpõem, conforme mostrado na figura (1) abaixo. Em certo momento, o tapete B é deslocado, o tapete A é girado de $90^o$ e colocado sobre o tapete B, conforme indicado na figura (2).



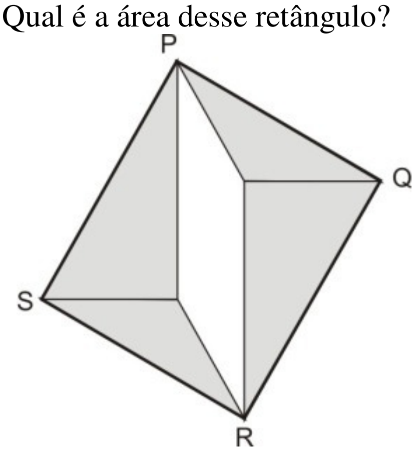

Sabendo que a área do tapete B é o dobro da área do tapete A, calcule a área da parte do piso que ficou descoberta.

***Problema 4:*** O hexágono regular *ABCDEF* tem área de 12 $cm^2$.

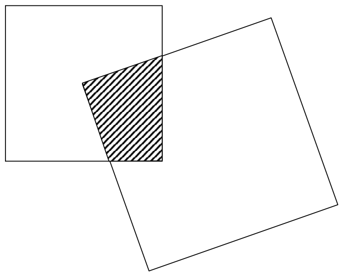
a) Traçando segmentos a partir de um vértice, o hexágono *ABCDEF* foi repartido em 4 triângulos, conforme figura. Calcule as áreas desses triângulos.




b) Usando os quatro triângulos em que foi dividido o hexágono, podemos montar o retângulo *PQRS*, na figura. Qual é a área desse retângulo?

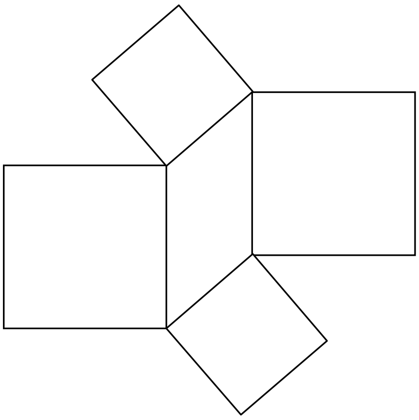


***Problema 5:*** a) Dois quadrados estão posicionados de modo que o centro do primeiro é vértice do segundo, como mostra a figura abaixo.

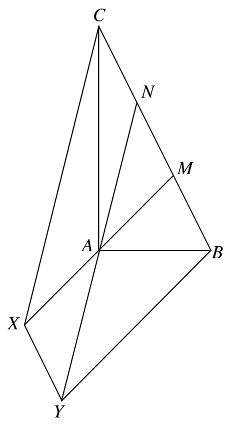


Se o lado do primeiro quadrado mede 12cm, quanto mede a área comum aos dois quadrados?

b) Na figura a seguir, o paralelogramo tem lados de medida 12cm e 4cm e área 40cm$^2$. Sejam $P$, $Q$, $R$ e $S$ os centros dos quadrados construídos externamente sobre os quatro lados desse paralelogramo. Sabendo que o quadrilátero $PQRS$ é um quadrado, calcule a sua área.



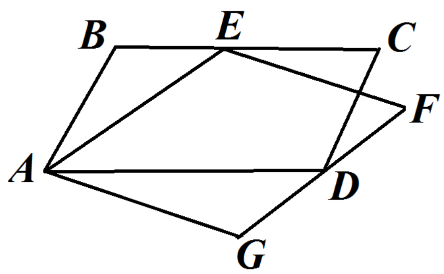
***Problema 6:*** Seja $ABC$ um triângulo retângulo em $A$. Considere $M$ e $N$ pontos sobre a hipotenusa $BC$ tais que $CN = NM = MB$. Os pontos $X$ e $Y$ são tais que $XA = AM$ e $YA = AN$. Determine a área de $XYBC$, sabendo que o triângulo $ABC$ tem área 12 cm$^2$.



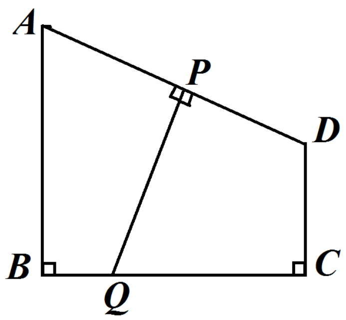
***Problema 7:*** As medidas das bases de um trapézio $ABCD$ são15 e 9, e a medida da altura é 4. As retas $DA$ e $CB$ são estendidas até se encontrarem em $E$. Se $F$ é o ponto médio de $AD$ e $G$ é o ponto médio de $BC$, determine a área do triângulo $FGE$.

***Problema 8:*** Seja $ABC$ um triangulo cuja altura relativa ao vértice $A$ mede 3. Se $l$ e $l'$ são duas retas paralelas a $BC$ e que dividem o triângulo $ABC$ em três regiões de áreas iguais, encontre a distância entre as retas $l$ e $l'$.

***Problema 9:*** Na figura abaixo, $ABCD$ e $AEFG$ são paralelogramos. Prove que $Área(ABCD) = Área(AEFG)$.




***Problema 10:*** Na figura, $AP = PD$, $AB = 9$, $BC = 8$ e $CD = 7$.Ache $Área(APQB)$.




***Problema 11:*** No retângulo *ABCD*, com diagonais *AC* e *BD,* os lados *AB* e *BC* medem, respectivamente, 13 cm e 14 cm. Sendo *M* a intersecção das diagonais, considere o triângulo *BME*, tal que *ME* = *MB* e *BE* = *BA*, sendo *E* ≠ *A* .

a) Calcule a área do triângulo *BME*.
b) Mostre que o segmento *BD* é paralelo ao segmento *EC*.

***Problema 12:*** Há duas figuras de papel: um triângulo equilátero e um retângulo. A altura do retângulo é igual à altura do triângulo e a base do retângulo é igual à base do triângulo. Divida o triângulo em três partes e o retângulo em duas, mediante cortes retos, de modo que com os cinco pedaços possamos montar, sem buracos nem superposições, um triângulo equilátero. Para montar a figura, cada parte pode ser girada e/ou dar a volta. (Justifique que o triângulo montado é equilátero.)

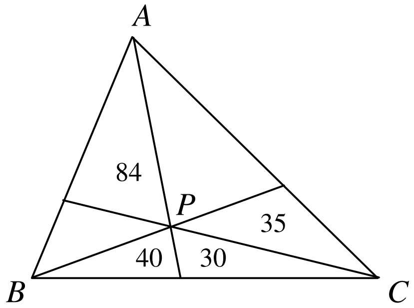
***Problema 13:*** Num quadrilátero convexo ABCD, sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA respectivamente. Se os segmentos MP e NQ dividem

ABCD em quatro quadriláteros com a mesma área, demonstre que ABCD é um paralelogramo.

***Problema 14:*** A partir de um quadrilátero convexo qualquer de papel, deve-se recortar um novo quadrilátero cuja área seja igual à metade da área do quadrilátero original. Somente podemos dobrar o papel uma ou mais vezes e cortar por algumas das linhas das dobras. Descreva as dobras e os cortes e justifique por que a área obtida é a metade

***Problema 15:*** $S$ é um ponto no interior do $\Delta ABC$ tal que as áreas dos triângulos $ABS$, $BCS$, $CAS$ são todas iguais. Prove que $S$ é o baricentro de $ABC$.

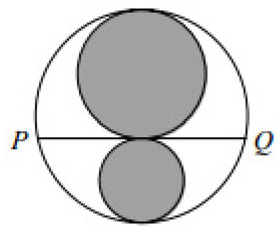
***Problema 16:*** Seja $P$ um ponto no interior de um triângulo $ABC$, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo $ABC$.



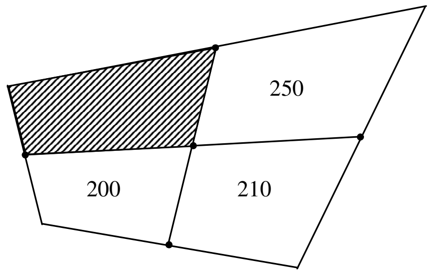

***Problema 17:*** No triângulo $ABC$, $A'$, $B'$, $C'$ estão sobre os lados $BC$, $AC$ e $AB$, respectivamente. Dado que $AA'$, $BB'$, $CC'$ são concorrentes no ponto $O$ e que $\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}=92$, encontre o valor de $\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CO}{OC'}$.

***Problema 18:*** Seja $ABCD$ um trapézio ($AD$ paralelo a $BC$) e seja $E$ a interseção de suas diagonais. Seja $P$ um ponto sobre o lado $AB$ tal que $Área(ADP) = Área(BCP)$. Prove que $Área(ADP) = Área(BCP) = Área(ABE) = Área(CDE)$.

***Problema 19:*** Três circunferências são tangentes entre si, tal como mostramos na figura. A região do círculo exterior que não está coberta pelos dois círculos interiores tem área igual a $2\pi$. Determine o comprimento do segmento PQ.



***Problema 20:*** Um terreno quadrangular foi dividido em quatro lotes menores por duas cercas retas unindo os pontos médios dos lados do terreno. As áreas de três dos lotes estão indicadas em metros quadrados no mapa a seguir.




Qual é a área do quarto lote, representado pela região escura no mapa?

***Problema 21:*** Considere um quadrado $ABCD$ de centro $O$. Sejam $E, F, G, H$ pontos no interior dos lados $AB, BC, CD, DA$, respectivamente, tal que $AE = BF = CG = DH$. Sabe-se que $OA$ intersecta $HE$ no ponto $X$, $OB$ intersecta $EF$ no ponto $Y$, $OC$ intersecta $FG$ no ponto $Z$ e $OD$ intersecta $GH$ no ponto $W$. Dado que $Area(EFGH) = 1$, calcule

$$Area(ABCD)) \times \left(Area(XYZW)\right)$$

***Problema 22:*** No triângulo retângulo *ABC*, os catetos *AB* e *BC* medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja $M$ o ponto médio da hipotenusa $AC$ e seja $D$ um ponto, distinto de *A*, tal que *BM* = *MD* e *AB* = *BD*.

a) Prove que *BM* é perpendicular a *AD*.
b) Calcule a área do quadrilátero *ABDC*.