Os Caça-Fantasmas: Técnicas em Geometria

Carlos Shine

Muitos de vocês devem estar familiarizados com as seguintes técnicas (se não, familiarizem-se!):

- Arrastão de ângulos
- Semelhanças e congruências de triângulos
- Abrir a portinha para somas de segmentos
- Paralelogramos para relacionar pontos médios e ângulos
- Trigonometria
- Geometria analítica
- Complexos
- Pontos clássicos
- Transformações geométricas (isometrias, homotetias, roto-homotetias, inversão)
- Potência de ponto, eixo radical, centro radical

A intenção aqui é trabalhar mais algumas ideias simples que são deixadas de lado e que podem custar problemas relativamente fáceis (veja o problema 1 da OBM 2014, por exemplo).

1 Serviço de utilidade pública

Antes de começar qualquer aula de geometria, sempre é bom ressaltar:

Faça uma boa figura!!

Primeiro, vamos definir o que é uma "boa figura". Uma boa figura:

- é feita com régua e compasso;
- é grande (uma folha inteira);
- deixa um bom espaço para marcar ângulos e traçar segmentos adicionais;
- não deixa pontos muito próximos um do outro;
- não é próxima de casos particulares notáveis (triângulo equilátero, isósceles, retângulo).

Uma boa regra é que se você começa a relutar a marcar coisas na sua figura, está na hora de fazer outra figura. **Não hesite em fazer várias figuras**. Muitas vezes, depois de progredir no problema, algumas partes da figura são inúteis, e devem ser eliminadas. Por isso, você não deve se contentar em fazer uma figura só.

Entre as razões para fazer uma boa figura estão:

- Você se certifica de que não leu o enunciado errado.

- Você se certifica de que não fez a figura errada.
- Ao entender como se faz uma certa construção você pode ter uma ideia melhor de como resolver o problema.
- Ao se obrigar a pensar em como fazer a figura você já está pensando no problema, ou seja, fazer uma boa figura não é uma perda de tempo.
- Uma boa figura permite fazer conjecturas que não são óbvias com uma figura imprecisa. Note que isso é útil mesmo se sua técnica favorita[1] for fazer contas: você pode provar a conjectura, que talvez você não encontrasse sem a boa figura, com contas!

É claro que há desvantagens em boas figuras (nada é 100% perfeito):

- A figura pode levar a conjecturas falsas – nesse caso, é sempre bom fazer outra figura, com parâmetros iniciais bem diferentes, para verificar.
- A figura pode levar a usar o que deve ser provado. Isso acontece bastante quando se quer provar que um triângulo ou quadrilátero geral é uma figura especial (por exemplo, provar que um quadrilátero é um losango). Nesse caso, é melhor fazer uma figura "errada" e tentar entender por que ela dá errado.

2 Métodos indiretos de demonstração em geometria

Por incrível que pareça, redução ao absurdo é algo completamente possível em geometria!

2.1 Pontos-fantasmas: redefinindo interseções

Muitas vezes a recíproca de um problema é mais fácil do que o problema. O que fazer para se aproveitar disso? Faça o seguinte: quando você quer provar que um ponto P tem alguma propriedade, defina um ponto P' que você sabe que tem a propriedade e prove que $P' = P$.

Em particular, quando se quer provar que um ponto P, interseção de duas retas/círculos/etc, pertence a uma outra reta/círculo/etc, no fundo você quer provar que três retas/círculos/etc são concorrentes; nesse caso, você está livre para tomar P' como a interseção de quaisquer dois das retas/círculos/etc.

2.2 Exemplos teóricos de uso dessa técnica

Muitas das recíprocas de teoremas de concorrência/colinearidade (lembre-se: em muitos casos, problemas de colinearidade pode ser transformados em problemas de concorrência) usam essa técnica. No que se segue, segmentos e ângulos são orientados.

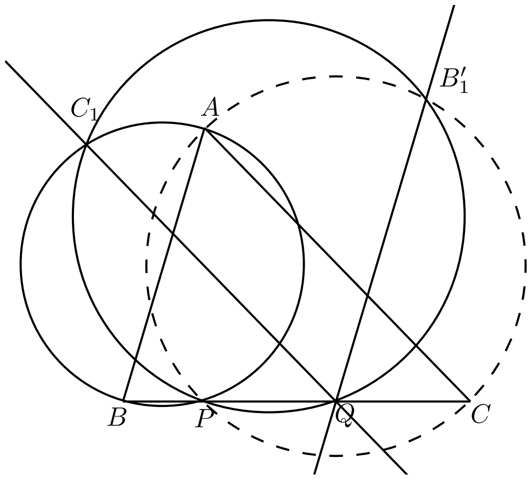
- **Volta do teorema de Ceva**: se $M \in AB$, $N \in BC$ e $P \in CA$ satisfazem $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ então CM, AN e BP são concorrentes.
- **Volta do teorema de Menelaus**: se $M \in AB$, $N \in BC$ e $P \in CA$ satisfazem $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$ então CM, AN e BP são colineares.
- **Volta de conjugados isogonais**: se P e Q são tais que $\angle PAB = \angle BAQ$ e $\angle PBC = \angle CBQ$ então $\angle PCA = \angle ACQ$.

Vejamos um exemplo menos teórico.

[1]Mas tenha em mente que sempre vão existir **vários** problemas que não saem com sua técnica favorita, seja ela fazer contas, projetiva, inversão etc etc.

Exemplo 1. (EUA 2005) Seja ABC um triângulo acutângulo e P e Q pontos sobre o lado BC. Seja C_1 um ponto tal que $APBC_1$ é um quadrilátero convexo cíclico, $QC_1 \parallel CA$ e C_1 e Q estão em semiplanos opostos com relação a AB. Analogamente, seja B_1 um ponto tal que $APCB_1$ é um quadrilátero convexo cíclico, $QB_1 \parallel BA$ e B_1 e Q estão em semiplanos opostos com relação a AC. Prove que B_1, C_1, P e Q estão em uma mesma circunferência.

Solução. Primeiro, uma boa figura:



Os pontos B_1 e C_1 estão "soltos" na figura, e P e Q são variáveis. Parece complicado trabalhar diretamente com o quadrilátero B_1C_1PQ. Definimos então $B_1' \neq Q$ como a interseção entre o circuncírculo de C_1PQ e a reta paralela a AB que passa por Q. Agora precisamos provar que $B_1' = B_1$, ou seja, que $APCB_1'$ é cíclico, com B_1' e Q em semiplanos distintos com relação a AC.

Mas isso é relativamente simples: observe que $\angle(C_1B_1', AB) = \angle C_1B_1'Q = \angle C_1PB = \angle C_1AB = \angle(C_1A, AB)$, ou seja, C_1, A e B_1' são colineares. Com isso, $\angle AB_1'P = \angle C_1B_1'P = \angle C_1QP = \angle ACP$, ou seja, $AB_1'CP$ é cíclico.

Além disso, como Q e C_1 estão em semiplanos opostos em relação a AB e todo ponto da reta QB_1' está no mesmo semiplano com relação a AB, B_1' e C_1 estão em semiplanos opostos em relação a AB, ou seja, A está sobre o segmento $B_1'C_1$. Com isso, a reta AC corta o segmento B_1' e Q, e portanto esses pontos estão em semiplanos opostos em relação a AC.

Com isso, concluímos que $B_1' = B_1$, e o resultado segue. □

Outro exemplo é a IMO desse ano.

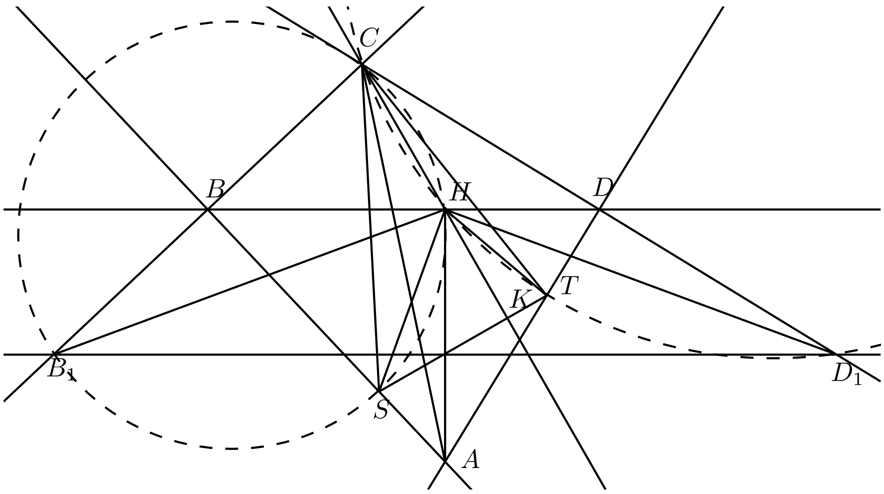
Exemplo 2.

(IMO 2014) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. O ponto H é o pé da perpendicular de A sobre BD. Os pontos S e T são escolhidos sobre os lados AB e AD, respectivamente, de modo que H esteja no interior do triângulo SCT e

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Prove que a reta BD é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo TSH.

Solução. Primeiro, vamos transformar essas condições de ângulos em algo mais geométrico. Temos $\angle CHS = 180° - (90° - \angle CSB) = 180° - \angle BCS$. É uma pena que esses dois ângulos suplementares estão virados "para o mesmo lado". Para consertar isso, refletimos C em relação a B, obtendo B_1 e o quadrilátero cíclico B_1CHS. Da mesma forma, refletimos C em relação a D, obtendo D_1 e o quadrilátero cíclico D_1CHT. Com isso, podemos redefinir S e T como as interseções dos circuncírculos de CHB_1 e CHD_1 com AB e AD, respectivamente. Note também que AB e AD são mediatrizes de B_1C e D_1C, assim A é circuncentro de B_1CD_1. Em resumo: podemos tomar B_1CD_1 como triângulo base do problema. Sendo $AH \perp BD$ e $BD \parallel B_1D_1$ (base média), $AH \perp B_1D_1$, ou seja, AH é mediatriz de B_1D_1. Seja também K a interseção de CH e ST.



Podemos então fazer um pouco de arrastão: sejam $\alpha = \angle BCS = \angle BB_1S$ e $\beta = \angle DCT = \angle DD_1T$. Então $\angle B_1HS = \angle SHK = \alpha$ e $\angle D_1HT = \angle THK = \beta$. Portanto $\angle B_1HD_1 = 2(\alpha+\beta)$, e $\angle B_1HA = \angle AHD_1 = \alpha+\beta$. Com isso, $\angle SHA = \beta$ e $\angle AHT = \alpha$.

Esses ângulos trocados sugerem... conjugados isogonais! De fato, note que no triângulo que interessa SHT, $\angle SHA = \angle THK = \beta$, ou seja, HA e HK são conjugados isogonais. Como BD ser tangente ao circuncírculo de SHT é equivalente ao circuncentro pertencer a AH, temos que provar que HK é altura, ou seja, $CH \perp ST$.

Explorando um pouco mais, vemos que S e T são conjugados isogonais no triângulo ACH, e que o problema acaba se provarmos que H e C são conjugados isogonais de AST. Mas isso acaba sendo complicado de fazer diretamente (eu sugiro que você tente! E se conseguir de um jeito curto, me avise!).

Por isso, adotamos outra estratégia: definimos C' como o conjugado isogonal de H em relação a AST. Provamos que $C' = C$: isso é verdade porque $\angle SAC' = \angle TAH = \angle DAH = 90^\circ - \angle HDA = 90^\circ - \angle BDA = 90^\circ - \angle BCA = \angle BAC = \angle SAC$ e $\angle SC'T = 180^\circ - \angle C'ST - \angle C'TS = 180^\circ - (180^\circ - \angle HSA) - (180^\circ - \angle HTA) = 180^\circ - \angle HSB - \angle HTD = 180^\circ - \angle HSC - \angle CSB - \angle HTC - \angle CTD = 90^\circ - \angle CSB + 90^\circ - \angle CTD - \angle HTC - \angle HSC = \alpha + \beta - \angle HTC - \angle HSC = \angle SHT - \angle HTC - \angle HSC = \angle SCT$. Com isso, C e C' são interseções de $SC = SC'$ com o arco capaz que vê ST com $\angle SCT = \angle SC'T$. Esse ponto é único, logo $C' = C$.

Com isso, o problema acaba rápido: $\angle HTS = 180^\circ - \angle ATC = \angle CTD = 90^\circ - \beta$, e portanto $\angle HKT = 180^\circ - \angle HTS - \angle THK = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \beta = 90^\circ$, ou seja, $CH \perp ST$. $\square$

2.3 Usando desigualdades

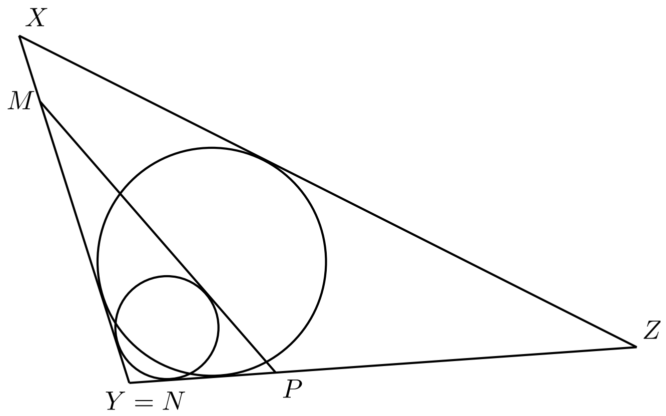
Pode parecer estranho, mas uma maneira de provar que um ponto está sobre alguma reta ou curva é supor que não está e chegar a um absurdo.

Exemplo 3. (OBM 2014) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

Solução. O seguinte lema é a chave para a resolução do problema.

Lema 1. Sejam XYZ e MNP triângulos com $\angle XYZ = \angle MNP$, $XY \geq MN$ e $YZ \geq NP$. Então o inraio do triângulo XYZ é maior ou igual do que o inraio do triângulo MNP. Caso pelo menos uma das duas desigualdades acima seja estrita, então o inraio de XYZ é estritamente maior do que o inraio de MNP.

Demonstração. Sobrepondo os triângulos de modo que as semirretas XY e MN coincidam e as semirretas YZ e NP coincidam, vemos que é possível fazer com que o triângulo MNP esteja contido no triângulo XYZ. Com isso, como os dois círculos inscritos são tangentes a ambas as semirretas, eles são homotéticos entre si; como MNP está contido em XYZ, o inraio de MNP é menor ou igual ao inraio de XYZ. Caso qualquer uma das desigualdades seja estrita, a igualdade não pode ocorrer, já que não há como o incírculo de MNP ser tangente a YZ, por estar totalmente contido no semiplano definido por MP que contém N. $\square$



Agora vamos ao problema. Suponha, por absurdo, que $PA < PC$. Se $PB \leq PD$ então o inraio de PAB é maior do que o inraio de PCD; se $PB \geq PD$ então o inraio de PBC é maior do que o inraio de PAD. Logo não é possível que $PA < PC$. Analogamente, prova-se que $PA > PC$ também não é possível. Portanto $PA = PC$ e, analogamente, $PB = PD$. Com isso, $ABCD$ é um paralelogramo, e as áreas de PAB e PBC são iguais. Assim, sendo o inraio igual à razão entre área e semiperímetro, os perímetros de PAB e PBC também são iguais, ou seja, $PA + PB + AB = PB + PC + BC \iff AB = BC$. Da mesma forma, $BC = CD$ e $CD = AD$, e portanto $ABCD$ é um losango. $\square$

Solução (de um estudante). A seguinte solução, obtida por um estudante na prova, é corajosa mas também depende de uma desigualdade (no caso, medidas de lados são positivas).

Sejam $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$ e $\angle APB = \angle CPD = \alpha$. Note que $\angle BPC = \angle DPA = 180^\circ - \alpha$. Lembrando que $\frac{1}{r} = \frac{p}{S}$, e aproveitando que $\operatorname{sen} \angle APB = \operatorname{sen} \angle BPC$, temos

$$\frac{a + b + AB}{ab} = \frac{b + c + BC}{bc} \iff \frac{1}{a} + \frac{AB}{ab} = \frac{1}{c} + \frac{BC}{bc} \iff (c - a)b = a \cdot BC - c \cdot AB.$$

Pessoas menos corajosas notariam que AB e BC são feios com lei dos cossenos. Mas esse estudante não se intimidou:

$$\begin{aligned}
&(c-a)^2 b^2 = a^2 \cdot BC^2 + c^2 \cdot AB^2 - 2ac \cdot AB \cdot BC \\
\iff &(c-a)^2 b^2 = a^2 \cdot (b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha) + c^2 \cdot (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) - 2ac \cdot AB \cdot BC \\
\iff &(a^2 + c^2 - 2ac)b^2 = b^2(a^2 + c^2) + 2a^2c^2 + 2abc(a - c)\cos\alpha - 2ac \cdot AB \cdot BC.
\end{aligned}$$

Olha só! A sorte premia os que têm coragem! $b^2(a^2 + c^2)$ cancela, e logo em seguida $2ac$ também cancela! Com isso, temos

$$AB \cdot BC = b^2 + ac + b(a - c)\cos\alpha$$

Nada mau! Vamos elevar ao quadrado mais uma vez para ver o que acontece:

$$(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)(b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha) = (b^2 + ac)^2 + b^2(a - c)^2\cos^2\alpha + 2b(b^2 + ac)(a - c)\cos\alpha$$

Nessas horas é melhor ver como ficam os termos em $\cos^2\alpha$, em $\cos\alpha$ e sem α.

- $\cos^2\alpha$: $b^2(a - c)^2 + 4b^2ac = b^2(a + c)^2$.
- $\cos\alpha$: $2b(b^2 + ac)(a - c) - 2bc(a^2 + b^2) + 2ab(b^2 + c^2) = 2b((b^2 + ac)(a - c) - a^2c - b^2c + b^2a + ac^2) = 2b(a - c)(b^2 + ac - ac + b^2) = 4b^3(a - c)$.

- sem α: $(b^2+ac)^2-(a^2+b^2)(c^2+b^2)=2b^2ac+a^2c^2-b^2(a^2+c^2)-a^2c^2=-b^2(a-c)^2$.

Portanto b^2 cancela e chegamos a

$$(a+c)^2\cos^2\alpha+4b(a-c)\cos\alpha-(a-c)^2=0.$$

Podemos trocar b por d e α por $180^\circ-\alpha$, e ficamos com

$$(a+c)^2\cos^2\alpha-4d(a-c)\cos\alpha-(a-c)^2=0.$$

Subtraindo as duas últimas equações, obtemos

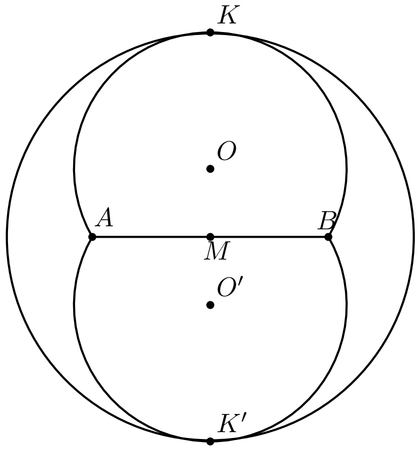
$$(b+d)(a-c)\cos\alpha=0.$$

Logo $a=c$ ou $\cos\alpha=0$. Mas $a=c$ implica $(a+c)^2\cos\alpha=0 \iff \cos\alpha=0$ e $\cos\alpha=0$ implica $-(a-c)^2=0 \iff a=c$, então as duas equações são verdadeiras. Logo $AC\perp BD$ e $PA=PC$ e (analogamente) $PB=PD$, e $ABCD$ só pode ser um losango. $\square$

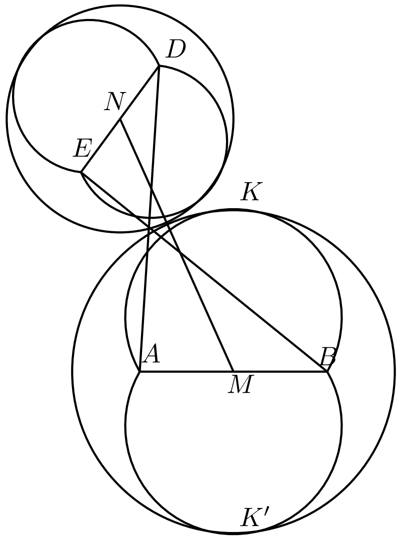
Muitas vezes uma configuração só aparece por ser o caso de igualdade de alguma desigualdade.

Exemplo 4. (IMO 2003) Cada par de lados opostos de um hexágono convexo tem a seguinte propriedade: a distância entre seus pontos médios é $\sqrt{3}/2$ vezes a soma de seus comprimentos. Prove que todos os ângulos do hexágono são iguais.

Solução. Primeiro, considere um dos lados AB do hexágono. $\sqrt{3}/2$ tem muito a ver com o ângulo de 60° (e olha só, queremos provar que os ângulos internos do hexágono são 120°!), então desenhamos o círculo com centro no ponto médio de AB e raio $AB\sqrt{3}/2$ e o arco capaz de 60° de AB. Sendo K tal que ABK é equilátero, temos que K pertence a ambos o arco capaz e o círculo, sendo o ponto de tangência entre eles. Portanto os arcos capazes estão contidos no círculo.



Como a distância entre os pontos médios dos lados opostos é $\sqrt{3}/2$ vezes a soma dos lados, os círculos correspondentes a eles são tangentes, e os arcos capazes têm no máximo um ponto de interseção, o que ocorre se, e somente se, o segmento ligando os pontos médios é perpendicular aos dois lados.



Agora considere o ponto de interseção P entre as diagonais AD e BE do hexágono $ABCDEF$. Se $P \neq K$ (e $P \neq K'$), então P está no exterior de algum dos arcos capazes de AB e DE; suponha, sem perdas, que de AB. Mas estar fora do arco capaz significa que $\angle APB < 60°$. Mas $\angle DPE = \angle APB$, então P está fora dos dois arcos. Se $P = K$ (ou $P = K'$), temos $\angle APB = 60°$. De qualquer forma, o ângulo agudo entre diagonais principais do hexágono é no máximo $60°$.

Mas como só há três diagonais principais, a soma dos seis ângulos agudos que eles definem é $360° = 6 \cdot 60°$. Logo, a igualdade deve ocorrer, ou seja, $P = K$, os lados opostos são paralelos e os triângulos ABP e DEP são ambos equiláteros. Com isso, e um pouco de arrastão, o problema acaba. $\square$

Note que dá para generalizar o problema, trocando o hexágono por um $2n$-ágono e $\sqrt{3}/2$ por $\cos(180°/n)$.

Solução. Esse problema também sai na conta, e mesmo assim precisa de uma desigualdade. Seja $ABCDEF$ o hexágono, e trabalhamos com vetores. Temos

$$\left|\frac{A+B}{2} - \frac{D+E}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|A-B| + |D-E|).$$

Queremos que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{ED}$, nesse sentido. Com isso, podemos usar a desigualdade triangular:

$$|(A+B)-(D+E)| \geq \sqrt{3}|A-B+E-D|.$$

Sendo $|\overrightarrow{v}|^2 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$ (aqui usamos o produto escalar), elevando a quadrado obtemos, usando um ponto qualquer O como origem e denotando $A = \overrightarrow{OA}$,

$$\begin{aligned}
&A \cdot A + B \cdot B + D \cdot D + E \cdot E + 2A \cdot B + 2D \cdot E - 2A \cdot D - 2A \cdot E - 2B \cdot D - 2B \cdot E \\
&\geq 3(A \cdot A + B \cdot B + D \cdot D + E \cdot E - 2A \cdot B - 2D \cdot E - 2A \cdot D + 2A \cdot E + 2B \cdot D - 2B \cdot E) \\
&\iff A \cdot A + B \cdot B + D \cdot D + E \cdot E \leq 4(A \cdot B + D \cdot E - A \cdot E - B \cdot D) + 2(A \cdot D + B \cdot E)
\end{aligned}$$

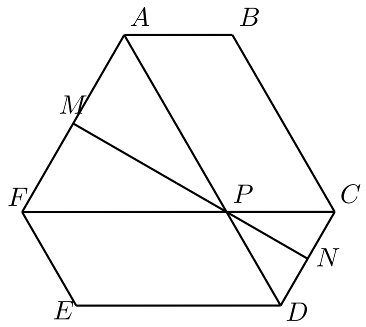
Sendo $S = A \cdot A + \cdots + F \cdot F$, $T = A \cdot B + B \cdot C + \cdots + F \cdot A$, $U = A \cdot C + B \cdot D + \cdots + F \cdot B$ e $V = 2(A \cdot D + B \cdot E + C \cdot F)$, temos, somando as desigualdades análogas,

$$2S \leq 4T - 4U + 2V \iff S - 2T + 2U - V \leq 0.$$

São 36 termos! Agora vamos tentar "completar os quadrados": pensando em algo do tipo $(P-N) \cdot (P-N)$, T e V indicam que A, C e E devem estar em P e B, D e F em N (ou vice-versa, é claro). Note que o sinal em U concorda, logo temos

$$|A+C+E-B-D-F|^2 \leq 0 \iff A+C+E-B-D-F = 0.$$

Além disso, as igualdades nas desigualdades triangulares devem ocorrer, ou seja, os lados opostos do hexágono são paralelos. Como também temos, por exemplo $C-F = B-A+D-E \iff \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$, temos também que $CF \parallel AB \parallel DE$ e $CF = AB + DE$.



Seja P sobre o segmento CF tal que $FP = DE$, de modo que $PC = AB$. Com isso, $DEFP$ e $ABCP$ são paralelogramos, e A, P e D são colineares. Note que $CP = AB$, $PD = EF$, $AP = BC$ e $FP = DE$, ou seja, os lados do triângulo APF têm medidas BC, DE e AF e os lados do triângulo CPD têm medidas AB, CD e EF. Esses dois triângulos são semelhantes pelo caso AA, e portanto suas medianas relativas a AF e CD medem $AF\sqrt{3}/2$ e $CD\sqrt{3}/2$, respectivamente. Analogamente, provamos que as medianas medem o lado correspondente vezes $\sqrt{3}/2$ para todos os lados dos dois triângulos.

Sendo a, b e c os lados de um triângulo cujas medianas medem o lado correspondente vezes $\sqrt{3}/2$, temos

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} \iff 2a^2 = b^2 + c^2.$$

Supondo que a é o maior lado, ou seja, $a \geq b$ e $a \geq c$, temos $2a^2 \geq b^2 + c^2$. Como ocorre a igualdade, $a = b = c$, ou seja, o triângulo é equilátero.

No nosso problema, temos que APF e CPD são equiláteros. Com um arrastão é fácil terminar, já que os dois paralelogramos $DEFP$ e $ABCP$ têm ângulos de $\angle BCP = \angle APF = 60^\circ$ e $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. $\square$

3 Um pouco de quadriláteros e pentágonos

Problemas de quadriláteros e pentágonos costumam ser mais difíceis, pois o que é mais estudado é o triângulo. Além disso, a liberdade extra com um vértice a mais faz com que seja difícil conseguir resultados mais gerais sobre quadriláteros quaisquer. Para pentágonos, as coisas pioram.

O que fazer, então, quando quadriláteros ou pentágonos aparecem?

- Veja se é possível reduzir o problema a algo de triângulos ou, no caso do pentágono, quadriláteros.
- Veja se dá para reduzir para algum quadrilátero especial: trapézio (dois lados paralelos), paralelogramo (lados opostos paralelos), losango (todos lados iguais) ou retângulo (ah, você sabe!).
- Dois quadriláteros muito especiais são o inscritível e o circunscritível.
- Outra tática é tentar *completar o quadrilátero.* Quadriláteros completos têm um montão de propriedades bacanas.
- Use as ideias acima sobre desigualdades e pontos-fantasma! Se o problema pede para provar que é um losango, imagine-o como o caso de igualdade de alguma desigualdade.
- Quadriláteros podem ter muito a ver com quádruplas harmônicas, então pode valer a pena tentar um pouco de geometria projetiva.
- Use transformações geométricas, especialmente quando há muitas simetrias.
- Se tudo der errado, mande ver nas contas!

3.1 Quadriláteros circunscritíveis

Suponha que $ABCD$ é inscritível. O que podemos afirmar (além do usual $AB + CD = AD + BC$ e as bissetrizes serem concorrentes)?

- Se os comprimentos dos segmentos tangentes de A, B, C, D ao incírculo são respectivamente a, b, c, d e as diagonais se cortam em P então $\frac{AP}{PC} = \frac{a}{c}$ e (analogamente) $\frac{BP}{PD} = \frac{b}{d}$.
- Se ligarmos os pontos de tangência a lados opostos, obtemos retas que passam pelo encontro das diagonais.
- É possível usar o teorema de Brianchon com vértices repetidos.
- Se o quadrilátero também é cíclico, o encontro das diagonais, o circuncentro e o incentro são colineares.
- E podemos usar o incírculo como círculo unitário em complexos.

Exemplo 5. (Polônia 2013) Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Sejam ω_1, ω_2, ω_3 and ω_4 círculos de diâmetros AB, BC, CD e DA. Prove que existe um círculo tangente a todos os círculos ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Solução. Sendo d_1, d_2, d_3 e d_4 as distâncias do centro do círculo tangente desejando, de raio r, aos pontos médios de AB, BC, CD e DA, respectivamente, temos

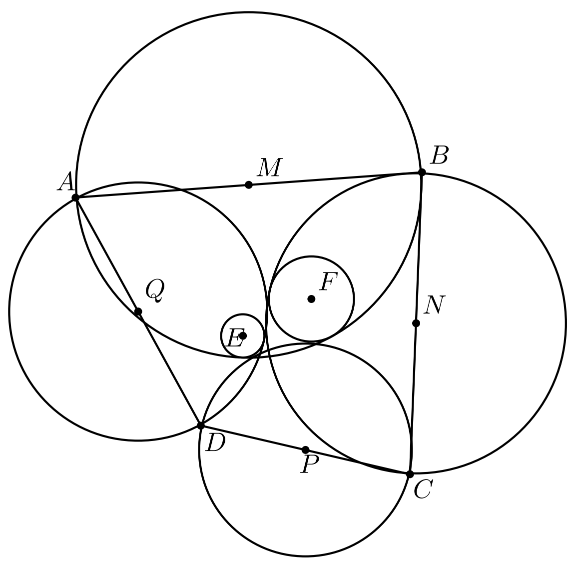
$$r = \left|d_1 \pm \frac{AB}{2}\right| = \left|d_2 \pm \frac{BC}{2}\right| = \left|d_3 \pm \frac{CD}{2}\right| = \left|d_4 \pm \frac{DA}{2}\right|$$

Note que isso implica

$$d_1 \pm d_2 = \pm\frac{AB}{2} \pm \frac{BC}{2} \quad \text{e} \quad d_3 \pm d_4 = \pm\frac{AD}{2} \pm \frac{CD}{2},$$

e $AB + CD = AD + BC \iff |AB - BC| = |AD - CD|$.

Esses tipos de contas aparecem muito com bases médias, então podemos tentar os pontos médios de dois vértices. Como os centros dos círculos ω_i são os pontos médios dos lados, nos restam os pontos médios das diagonais. Sejam então E e F os pontos médios de AC e BD, respectivamente. Com uma figura, vemos como devem ser as tangências:



Com isso, o problema essencialmente acabou: supondo sem (muitas) perdas $AD > CD$ (falta o caso $AD = CD$), tome $r = (AD - CD)/2 = (AB - BC)/2$. Temos $EP = AD/2 = CD/2 + r$, $EQ = CD/2 = AD/2 - r$, $EM = BC/2 = AB/2 - r$ e $EN = AB/2 = BC/2 + r$. Assim o círculo de centro E e raio r é tangente internamente aos círculos de diâmetros AB e AD e externamente aos círculos de diâmetros BC e CD.

Analogamente, pode-se provar que se $AB > AD$, o círculo de centro F e raio $s = (AB - AD)/2 = (BC - CD)/2$ é tangente internamente dos círculos de diâmetros AB e BC e externamente aos círculos de diâmetros AD e CD.

O único caso que falta é quando $AD = CD = AB$. Mas nesse caso temos um losango, e todos os círculos têm o mesmo raio e passam pelo centro do losango. Nesse caso, tomamos o círculo de raio $AB = BC = CD = DA$ que é tangente internamente a todos os quatro círculos. □

3.2 Quadriláteros completos

São os quadriláteros conhecidos unidos com as retas que contêm os lados, isto é, um quadrilátero completo é a união de quatro *retas* em vez de quatro *segmentos*.

O principal teorema é

Teorema 1 (Miquel)**.** *Sejam a, b, c, d quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas nem três concorrentes. Os circuncírculos dos quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel das quatro retas.*

Essa configuração tem várias outras propriedades. Considere um quadrilátero completo e seja M o seu ponto de Miquel. Então:

- os circuncentros dos quatro triângulos determinados pelo quadrilátero e M estão sobre uma mesma circunferência.
- as projeções ortogonais de M sobre as quatro retas do quadrilátero pertencem a uma mesma reta r; além disso, M é o único ponto do plano com essa propriedade.
- os ortocentros dos quatro triângulos pertencem a uma mesma reta s.
- as retas r e s são paralelas, e a distância de M a r é metade da distância de M a s.
- sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo e X e Y as interseções dos lados opostos AD e BC e AB e CD, respectivamente, então os pontos médios de AD, BC e XY são colineares (essa é a *reta de Gauss* de $ABCD$). Essa reta é perpendicular a r e s.
- os três círculos com as diagonais como diâmetros são coaxiais e o eixo radical é s.
- M é o centro de roto-homotetia que leva dois dos seis vértices a outros dois dos seis vértices.
- ao invertermos a configuração de Miquel toda (quatro círculos, quatro retas), obtemos outra configuração de Miquel.

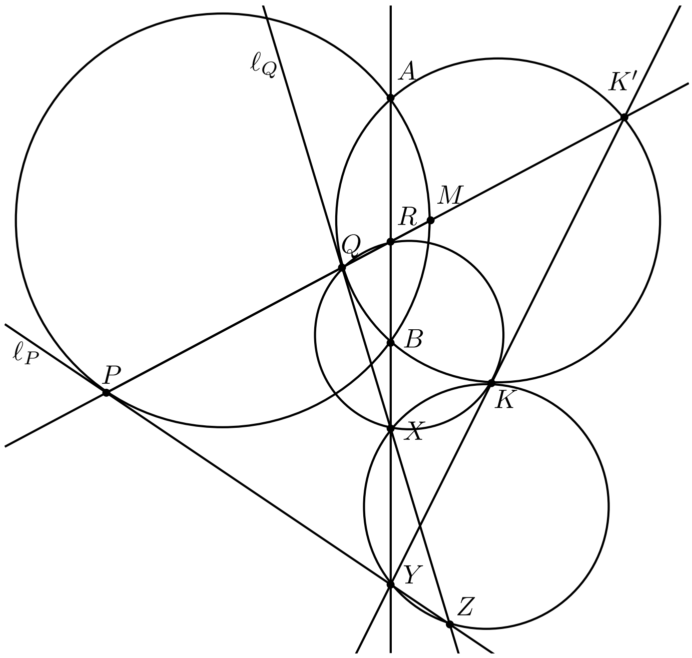
Se, além disso, o quadrilátero $ABCD$ for cíclico, ao completarmos com E e F sendo as interseções dos lados opostos temos:

- M está sobre EF.
- sendo O o circuncentro de $ABCD$, $OM \perp EF$.
- O, M e o ponto de interseção das diagonais são colineares.
- OM bissecta $\angle AMC$ e $\angle BMD$, e intersecta o circuncírculo no incentro e no M-excentro de ambos AMC e BMD (sim, o incentro e o M-excentro coincidem nos dois triângulos).

Um bom exemplo de aplicação é o problema 5 da APMO 2014.

Exemplo 6. (APMO 2014) Os círculos ω e Ω cortam-se nos pontos A e B. Seja M o ponto médio do arco AB do círculo ω (M está no interior de Ω). Uma corda MP do círculo ω intersecta Ω em Q (Q está no interior de ω). Sejam ℓ_P a reta tangente a ω que passa por P e ℓ_Q a reta tangente a Ω que passa por Q. Prove que o circuncírculo do triângulo formado pelas retas ℓ_P, ℓ_Q e AB é tangente a Ω.

Solução. Primeiro, uma boa figura:



Provaremos que o ponto de tangência é na verdade o ponto de Miquel K do quadrilátero completo definido por ℓ_P, ℓ_Q, AB e PQ. Sendo mais claro, sendo K o ponto de Miquel, provaremos que o circuncírculo de $XYZK$ (inscritível pois K é o ponto de Miquel) tangencia ω em K.

Primeiro, note que, sendo M o ponto médio do arco AB, a tangente por M é paralela a AB. Logo $\angle(AB, PM) = \angle(PM, \ell_P)$, ou seja, o triângulo YPR é isósceles.

O ponto Y está sobre o eixo radical de ω e Ω, então se invertermos com centro em Y e raio $\sqrt{YA \cdot YB} = YP = YR$ esses dois círculos se mantêm fixos. Além disso, dois dos círculos da configuração de Miquel, $XYZK$ e $PRKY$, viram as retas $X'Z'K'$ e PRK', respectivamente.

Agora, vamos fazer um *círculo* fantasma! Considere o círculo Ω_1 que passa por Q, K e K'. Pela inversão, $YR^2 = YK \cdot YK'$, de modo que $\angle XRK = \angle YRK = \angle YK'R = \angle KK'Q$. Mas no círculo (de Miquel) $XKQR$, $\angle XRK = \angle XQK$, logo $\angle KK'Q = \angle XQK$, ou seja, ℓ_Q é tangente a Ω_1. Novamente da inversão, $YK \cdot YK' = YQ \cdot YQ'$, ou seja, Q' també, está sobre Ω_1. Os círculos Ω e Ω_1 passam por Q' e Q (Q está sobre Ω e vai para um ponto $Q' \in \Omega' = \Omega$) e são tangentes a ℓ_Q; mas só existe um círculo que satisfaz a essas duas condições, logo $\Omega_1 = \Omega$.

Com isso, o problema termina rápido: já temos que $K \in \Omega$, falta provar que K é o único ponto de interseção. Da inversão, isso é equivalente a provar que o inverso de $XYZK$, a reta $K'X'$, é tangente ao inverso de Ω, que é o próprio Ω. Mas $\angle YK'X' = \angle YXK = 180° - \angle RXK = 180° - \angle RQK = 180° - \angle K'QK$, e o resultado segue. □

4 Problemas

4.1 Pontos-fantasma e desigualdades

1. (OBM 1988) Dois triângulos são circunscritos a uma circunferência. Prove que se existir uma circunferência contendo 5 dos vértices, então ela conterá também o sexto.[2]

[2]Sim, é o porisma de Poncelet para $n = 3$.

2. (APMO 2013) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo ω e P um ponto sobre o prolongamento de AC tal que PB e PD são tangentes a ω. A reta tangente a ω passando por C corta PD em Q e AD em R. Seja E o segundo ponto de interseção entre AQ e ω. Prove que B, E e R são colineares.

3. (IMO 2007) Considere cinco pontos A, B, C, D e E tais que $ABCD$ é um paralelogramo e $BCED$ é um quadrilátero cíclico. Seja ℓ uma reta que passa por A. Suponha que ℓ intersecta o interior do segmento DC em F e intersecta a reta BC em G. Suponha também que $EF = EG = EC$. Prove que ℓ é a bissetriz do ângulo $\angle DAB$.

4. (EUA 2009) O trapézio $ABCD$, com $AB \parallel CD$, está inscrito no círculo ω. O ponto G está no interior do triângulo BCD. As semirretas AG e BG cortam ω novamente em P e Q, respectivamente. A reta que passa por G e é paralela a AB corta BD e BC em R e S, respectivamente. Prove que o quadrilátero $PQRS$ é cíclico se, e somente se, BG bissecta $\angle CBD$.

5. (Turquia TST 2013) Seja E a interseção das diagonais do quadrilátero convexo $ABCD$. Sabe-se que $\angle EDC = \angle DEC = \angle BAD$. O ponto F está sobre o segmento BC e é tal que $\angle BAF + \angle EBF = \angle BFE$, prove que A, B, F e D estão sobre uma mesma circunferência.

6. (EUA TST 2015) Seja ABC um triângulo escaleno com incentro I cujo incírculo toca os lados BC, CA, AB em D, E e F, respectivamente. Denote por M o ponto médio de BC. Seja Q um ponto no incírculo tal que $\angle AQD = 90^\circ$. Seja P o ponto no interior do triângulo sobre a reta AI para o qual $MD = MP$. Prove que $\angle PQE = 90^\circ$ ou $\angle PQF = 90^\circ$.

7. (Sharygin 2010)[3] Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = BC$. Um ponto K está sobre a diagonal BD e é tal que $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Prove que $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

8. (Irã TST 2014) O incírculo de um triângulo escaleno tem centro I e toca o lado BC em D. Seja X um ponto no arco BC que não contém A do circuncírculo de ABC. Sejam E e F as projeções ortogonais de X sobre as retas BI e CI, respectivamente, e M o ponto médio de EF. Prove que se $MB = MC$ então $\angle BAD = \angle CAX$.

9. (Banco IMO 2011) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo cujos lados são todos tangentes a um círculo ω de centro O. Suponha que o circuncírculo do triângulo ACE seja concêntrico com ω. Seja F a projeção ortogonal de B sobre CD. Suponha que a paerpendicular de B a DF corta a reta EO no ponto K. Seja L a projeção ortogonal de K sobre DE. Prove que $DJ = DL$.

10. (OBM 2004) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de ABC, BCD, CDA e DAB têm um ponto em comum se, e somente se, $ABCD$ é um losango.

11. (OBM 2006) Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

12. (Torneio das Cidades 2010) O quadrilátero $ABCD$ está circunscrito a um círculo com centro I. Sejam M e N os pontos médios de AB e CD, respectivamente. Sabe-se que $\frac{IM}{AB} = \frac{IN}{CD}$. Prove que $ABCD$ é um trapézio.

13. (EUA 2004) Um círculo ω está inscrito em um quadrilátero $ABCD$. Seja I o centro de ω. Suponha que

$$(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 = (AB + CD)^2.$$

Prove que $ABCD$ é um trapézio isósceles.

[3]A olimpíada Sharygin é uma olimpíada russa de geometria por correspondência. É uma homenagem ao grande matemático russo Igor Fedorovich Sharygin.

14. (Romênia TST 2005) Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que os inraios dos triângulos AEF, BDF e CDE são iguais à metade do inraio de ABC. Prove que D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo ABC.

4.2 Quadriláteros e pentágonos

15. (OBM 2010) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle B \neq 90°$ e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

16. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Considere os círculos dos nove pontos dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB, e para cada vértice, construa o círculo que passa pela projeção ortogonal dele nos lados (ou prolongamentos) do triângulo formado pelos outros três vértices. Prove que esses oito círculos têm um ponto em comum.

17. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Construa quatro quadrados $AFGB$, $BLXC$, $CJKD$, $DHIA$ externos ao quadrilátero $ABCD$. Os incentros de BGL, XCJ, KDH e IAF são M, N, P e Q, respectivamente. Prove que $MNPQ$ é circunscritível.

18. Sejam A_0, A_1, A_2 e A_3, em ordem, os vértices de um quadrilátero convexo Q. Os índices são todos módulo 4. Seja ℓ_k a reta A_kA_{k+1}, ω_k o círculo tangente a ℓ_{k-1}, ℓ_k e ℓ_{k+1} que está fora de Q, e t_k a reta que passa pelos pontos de tangência de ω_k em ℓ_{k-1} e ℓ_{k+1}. Finalmente, seja B_k a interseção de t_k e t_{k+1}. Prove que B_1B_3 bissecta A_1A_3.

19. (Lista da IMO 2006)[4] Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que AB e CD encontram-se em P e AD e BC encontram-se em Q. Se O é um ponto no interior de $ABCD$ tal que $\angle BOP = \angle DOQ$, prove que $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

20. (Bulgária TST 2004) Sejam P e Q pontos sobre as diagonais AC e BD, respectivamente, do quadrilátero convexo $ABCD$ tais que $\frac{AP}{AC} + \frac{BQ}{BD} = 1$. A reta PQ corta os lados AD e BC nos pontos M e N, respectivamente. Prove que os circuncírculos dos triângulos AMP, BNQ, DMQ e CNP têm um ponto em comum.

21. (Banco IMO 2009) Os lados AD e BC do quadrilátero $ABCD$, em que AB não é paralelo a CD, cortam-se no ponto P. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros e H_1 e H_2 os ortocentros dos triângulos ABP e CDP, respectivamente. Os pontos médios de O_1H_1 e O_2H_2 são E_1 e E_2, respectivamente. Prove que a reta perpendicular a CD que passa por E_1, a reta perpendicular a AB que passa por E_2 e H_1H_2 são concorrentes.

22. (Banco IMO 2011) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Suponha que os círculos de diâmetro AB e CD se cortam em dois pontos E e F no interior de $ABCD$. Sejam P, Q, R as projeções de E sobre os lados AB, BC, CD e X, Y, Z as projeções de F sobre os lados AB, BC, CD. Suponha que os circuncírculos de PQR e XYZ se cortam em dois pontos K e L. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio de EF.

23. (Polônia 2008) No pentágono convexo $ABCDE$, $BC = DE$, $\angle ABE = \angle CAB = \angle AED - 90°$ e $\angle ACB = \angle ADE$. Prove que $BCDE$ é um paralelogramo.

24. (Sérvia 2008) No pentágono $ABCDE$, $\angle EAB = \angle ABC = 120°$, $\angle ADB = 30°$ e $\angle CDE = 60°$. Seja $AB = 1$. Prove que a área do pentágono é menor do que $\sqrt{3}$.

25. (OBM 2011) Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices

[4] Tenho quase certeza de que esse problema é da Bulgária.

consecutivos do pentágono, tais que

$$\operatorname{area} P_iP_{i+1}P_{i+2} \le \frac{5-\sqrt{5}}{10} \le \operatorname{area} P_jP_{j+1}P_{j+2}.$$

26. (Banco IMO 2010) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que os lados BC e AE são paralelos, $AB = BC + AE$, e $\angle ABC = \angle CDE$. Seja M o ponto médio de CE, e O o circuncentro do triângulo BCD. Dado que o ângulo $\angle DMO$ é reto, prove que $2\angle BDA = \angle CDE$.

27. (Romênia TST 2008) Prove que todo pentágono convexo tem um vértice cuja distância ao lado oposto é menor do que a soma das distâncias dos vértices vizinhos ao mesmo lado.