Combimetria ou Geonatória?

Carlos Shine

Vamos ver algumas ideias e técnicas para resolver problemas que misturam geometria e combinatória.

1 Distâncias, triângulos e ângulos

Muitos problemas se relacionam a distâncias, seja quantidade delas como maiores ou menores distâncias. Para isso, as seguintes ideias são úteis:

- Dados três pontos A, B e C, $AB + BC \geq AC$, com igualdade se, e somente se, B está sobre o segmento AC.
- Em um triângulo, o maior lado se opõe ao maior ângulo interno e o menor lado se opõe ao menor ângulo interno. Em particular, o maior lado de um triângulo obtusângulo (ou retângulo) se opõe ao ângulo obtuso (ou reto).

Exemplo 1. *Seja S um conjunto finito de pontos. Prove que se A, B, C, D são pontos distintos de S tais que AB e CD são ambos segmentos de distância máxima, então esses segmentos se cortam em seus respectivos interiores.*

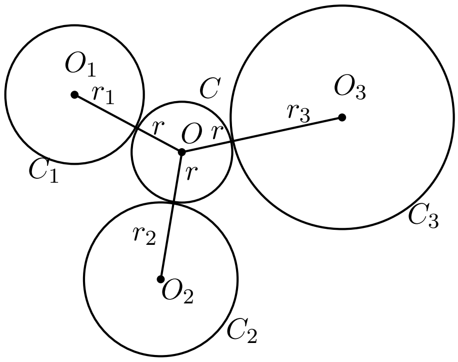
Solução: Use a desigualdade triangular. Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo então $AC + BD > AB + CD$: sendo P a interseção de AC e BD, temos $AP+PB > AB$ e $CP+PD > CD$, e $AC+BD = AP+PB+CP+DP > AB + CD$. Se o fecho convexo de A, B, C e D é um triângulo então, supondo que D está dentro do fecho convexo temos $AC > CD$ ou $BC > CD$, pois prolongando CD até encontrar o segmento AB em Q temos $\angle CQA \geq 90^\circ$ ou $\angle CQB \geq 90^\circ$, de modo que um dos triângulos AQC ou BQC é obtusângulo ou retângulo, sendo o ângulo obtuso ou reto em Q.

2 Cobrindo figuras

Problemas desse tipo podem ser resolvidos com uma variedade bastante grande de técnicas. Uma mistura de casos extremos, casa dos pombos e saber construir exemplos geralmente funciona bem.

Exemplo 2. *(EUA) Um reticulado no plano cartesiano consiste em todos os pontos (m, n), onde m e n são inteiros. É possível cobrir todos os pontos do reticulado com uma família infinita de círculos cujos interiores não se sobrepõem se cada círculo da família tem raio maior ou igual a 5?*

Solução: A resposta é não (os círculos são muito grandes, não?). Para isso, suponha que existe uma cobertura desse tipo e seja C o maior círculo que não se sobrepõe com algum círculo da família. Então o seu raio r deve ser menor do que $\sqrt{2}/2$; caso contrário, C cobriria um ponto do reticulado, que não seria coberto pela família.



Além disso, C tangencia pelo menos três círculos C_1, C_2, C_3 da família. Sejam O, O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos C, C_1, C_2, C_3, respectivamente. Então um dos ângulos $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3$, $\angle O_3OO_1$ é menor ou igual a $120°$. Suponha, sem perdas, que é $\angle O_1OO_2$. Então, pela lei dos co-senos,

$$O_1O_2^2 \leq OO_1^2 + OO_2^2 + OO_1 \cdot OO_2$$

Sejam r_1 e r_2 os raios de C_1 e C_2, respectivamente. Então $O_1O_2 \geq r_1 + r_2$, $OO_1 = r + r_1$ e $OO_2 = r + r_2$. Substituindo, obtemos

$$(r_1 + r_2)^2 \leq (r + r_1)^2 + (r + r_2)^2 + (r + r_1)(r + r_2) \iff 12r^2 \geq (r_1 - 3r)(r_2 - 3r)$$

Mas $r < \sqrt{2}/2$ e r_1 e r_2 são maiores ou iguais a 5, de modo que

$$12r^2 \geq (5 - 3r)^2 \iff 2\sqrt{3}r \geq 5 - 3r \iff r \geq \frac{5}{3 + 2\sqrt{3}}$$

Um cálculo rápido mostra que $\frac{5}{3+2\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, e o problema acabou.

3 Princípio do extremo

Considerar a maior (ou menor) distância ou algum triângulo de área máxima (ou mínima) ou ... máximo (ou mínimo) pode ser bastante útil.

Exemplo 3. *(OBM) Existe um conjunto finito de $n > 2$ pontos no plano tais que não há três pontos colineares e o circuncentro de quaisquer três pontos pertence ao conjunto?*

Solução: Não. Fazendo alguns desenhos você deve perceber que se você tentar achar um conjunto A satisfazendo as condições do problema, os circuncírculos vão ficando muito pequenos (ou muito grandes, dependendo de como você tentar construir). Então usar o princípio do extremo parece ser uma boa ideia para formalizar a ideia de que os circuncírculos encolhem ou crescem indefinidamente.

Seja CD um segmento com extremos em A tal que sua medida seja mínima. Como existe pelo menos um ponto E no conjunto A que não pertence à reta CD, existe pelo menos um ponto de A na mediatriz r de CD (o centro da circunferência passando por C, D e E). Seja, então, $P \in r \cap A$ tal que a distância de P a CD é mínima.

Como, por definição, $PC = PD \geq CD$, o triângulo CDP é acutângulo, logo, sendo O o seu circuncentro, $O \in r \cap A$ e $d(O, r) < d(P, r)$, contradição.

Podemos observar que na resolução dada supõe-se apenas que os pontos de A não estão todos sobre uma mesma reta.

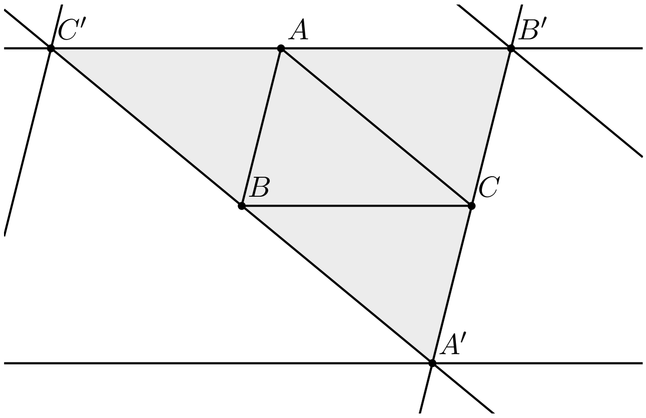
4 Onde estão os pontos?

Na grande maioria dos problemas de Geometria, o primeiro passo é fazer uma figura que representasse bem a situação. E se isso não possível? E se não for possível nem mesmo desenhar uma figura?

Nesses casos, se não podemos dizer onde estão exatamente os pontos, nós pelo menos procuramos *suas possíveis posições*. Sendo um pouco mais específico, verificamos *em que região ou regiões está o ponto.*

Exemplo 4. *São dados $n \geq 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três deles formam um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos os n pontos estão no interior de um triângulo de área menor que 4.*

Solução: Considere o triângulo ABC com vértices em três desses pontos que tem área máxima. Essa área é menor do que 1. Onde podem estar os outros pontos? Eles não podem estar mais distantes de BC do que A, pois senão dariam um triângulo de área maior que a de ABC. O mesmo argumento vale para os outros dois lados. Então eles devem estar confinados na seguinte região:



Mas essa região tem área exatamente igual a quatro vezes a área de ABC, ou seja, é menor do que 4. Deslocando um pouquinho cada lado de $A'B'C'$ para fora, podemos obter um triângulo de área menor do que 4 ainda, terminando o problema.

5 Fecho convexo

Fecho convexo de um conjunto S de pontos (finito ou infinito) limitado no plano (poderia ser do espaço ou de figuras com mais dimensões ainda) é a menor figura convexa que contém S. No caso do plano, é figura obtida quando soltamos um elástico esticado em torno de S.

Exemplo 5.

É dado um conjunto de N discos de raios unitários. Esses círculos podem se intersectar (mas não coincidir). Mostre que existe um arco de comprimento maior ou igual a $2\pi/N$ pertencendo à circunferência de um desses discos que não é coberto por nenhum outro disco.

Solução: Consideremos o fecho convexo H desse conjunto de discos. Um arco que esteja na borda do fecho convexo não pode ser coberto por outro disco. A junção de todos os arcos no bordo de H é um círculo de raio unitário. Como este círculo tem perímetro 2π e no máximo juntamos N arcos, pelo menos um dos arcos da junção é maior ou igual a $2\pi/N$.

6 Contagem e geometria

Muitas contagens podem ser simplificadas com ideias geométricas. Listamos aqui alguns clássicos:

- Uma reta é determinada por dois pontos; se o conjunto de pontos em questão tem n pontos, sem três colineares, há $\binom{n}{2}$ retas determinadas por esses pontos.

- Um círculo é determinado por três pontos; se o conjunto de pontos em questão tem n pontos, sem quatro concíclicos, há $\binom{n}{3}$ círculos determinadas por esses pontos.

- Um ponto equidistante a dois outros pontos A e B está sobre a mediatriz de AB. Isso ajuda a contar triângulos isósceles, por exemplo.

Exemplo 6. *(IMO) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que* *(i) Não haja três pontos de S que sejam colineares;*

(ii) Para qualquer ponto P, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

Prove que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

Solução: Pontos equidistantes, como citamos, lembram mediatriz. Então considere as mediatrizes de pontos de S. Há no máximo $\binom{n}{2}$ mediatrizes (mediatrizes de dois segmentos podem coincidir!). Agora, para cada ponto P, considere todos os pelo menos $\binom{k}{2}$ pares de pontos equidistantes a P. Esses pares determinam pelo menos $\binom{k}{2}$ mediatrizes, todas passando por P.

Contemos, então, de duas maneiras, a quantidade N de pares (P, ℓ), em que P é um ponto de S e ℓ é a mediatriz de dois pontos de S que passa por P. Contando por P, cada ponto dá pelo menos $\binom{k}{2}$ mediatrizes, logo $N \geq n \cdot \binom{k}{2}$; contando por ℓ, cada mediatriz passa por no máximo dois pontos de S, já que S não tem três pontos colineares. Logo $N \leq 2\binom{n}{2}$. Aí é fazer a conta:

$$2\binom{n}{2} \geq N \geq n \cdot \binom{k}{2} \implies n(n-1) \geq \frac{nk(k-1)}{2} \iff k^2 - k - 2(n-1) \leq 0$$
$$\implies k \leq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8n}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

7 Distâncias mínimas e círculos

Se a distância mínima entre dois pontos de um conjunto é d, pode valer a pena traçar, com centro em cada ponto do conjunto, um círculo de raio $r = d/2$. Os círculos vão ser todos disjuntos, pois se dois deles não fossem a distância entre seus centros seria menor do que $r + r = d$, o que não é possível!

Exemplo 7. *Uma quantidade n de moedas, todas de raio 1, estão sobre uma mesa retangular (centros das moedas no interior do retângulo), de modo que as moedas não se sobreponham e não seja possível colocar mais uma moeda sobre a mesa sem que ela se sobreponha a alguma ou algumas das outras. Prove que é possível cobrir toda a mesa com $4n$ moedas, possivelmente com sobreposição.*

Solução: A primeira condição nos diz que nenhum ponto P está a uma distância maior que 2 de todos os centros. Se estivesse, existia um círculo de centro P com raio 1 que não intersecta nenhum dos outros. Isso quer dizer que todo ponto P está a uma distância no máximo 2 de algum centro, o que quer dizer que se traçarmos círculos de raio 2 com os mesmos centros cobrimos a mesa.

Mas queremos cobrir a mesa com círculos de raio 1, e não dá para simplesmente trocar um círculo de raio 2 por quatro de raio 1! O que fazemos?

Fazemos uma semelhança: tomamos uma cópia reduzida desse conjunto de círculos de raio 2, em 50%. Com isso, cobrimos um retângulo com a metade das dimensões. Retângulos podem ser substituídos por quatro retângulos com metade das dimensões, então fazemos quatro cópias reduzidas, com $4n$ moedas, e cobrimos toda a mesa.

8 Problemas

1. (OBM) Qual é a maior quantidade de vértices alinhados que um polígono de 12 lados pode ter?

   (Isso não caiu na OBM) Generalize esse problema para n lados.

2. (OBM) No interior de um quadrado de lado 16 são colocados 1000 pontos. Mostre que é possível colocar um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ no plano de modo que ele cubra pelo menos 16 destes pontos.

3. (Cone Sul) É dado um quadrado de lado 1. Demonstrar que, para cada conjunto finito de pontos no bordo do quadrado, é possível achar um vértice do quadrado com a seguinte propriedade: a média aritmética dos quadrados das distâncias de tal vértice aos pontos do conjunto é maior ou igual a $\frac{3}{4}$.

4. (Cone Sul) Achar todos os números inteiros $n \geq 3$ tais que exista um conjunto S_n formado por n pontos do plano que satisfaçam as duas condições seguintes:

   (a) Três pontos quaisquer não são colineares.

   (b) Nenhum ponto se encontra no interior do círculo cujo diâmetro tem por extremos dois pontos quaisquer de S_n.

   NOTA: Os pontos da circunferência não são considerados interiores ao círculo.

5. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

6. (Putnam) Considere $2n$ pontos no plano, quaisquer 3 deles não colineares. Pintamos n deles de vermelho e os outros de azul. Prove que é possível agrupar os pontos em pares utilizando segmentos com extremidades em pontos de cores distintas de modo que quaisquer dois segmentos não se cortem.

7. (OBM) Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

8. (Cone Sul) Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior que ou igual a S/a.

9. Dados n pontos no plano, prove que três deles determinam um ângulo menor ou igual a $180°/n$.

10. (OBM) Seja P um pentágono convexo com todos os lados iguais. Prove que se dois dos ângulos de P somam 180 graus é possível cobrir o plano com P, sem sobreposições.

11. (OBM) Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.

12. (OBM) Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

    Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

13. (Cone Sul) Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.

    Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

14. (Cone Sul) Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores que ou iguais a $90°$.

15. (Ibero) Prove que para qualquer polígono convexo de área 1, existe um paralelogramo de área dois que o contém.

16. (OBM) Seja S um conjunto de n pontos no plano de modo que não haja três pontos de S colineares. Para que valores de n é possível colorir todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S, todos de mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos? A quantidade disponível de cores é ilimitada.

17. (Ibero) Seja $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, sendo P_1 o centro do círculo. Para cada $k = 1, \ldots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de P mais próximo a P_k e distinto de P_k. Demonstrar que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9$.

18. (Ibero) Encontrar o maior valor possível n para que existam pontos distintos P_1, P_2, P_3, …, P_n no plano, e números reais r_1, r_2, …, r_n de modo que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes P_i e P_j seja $r_i + r_j$.

19. (OBM) Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?

    Observação: Entende-se "maior sombra de uma figura no sol a pino" como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

20. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Demonstrar que existem n triângulos da mesma área cumprindo todas as seguintes propriedades:

    - Seus interiores são disjuntos, isto é, os triângulos não se sobrepõem;
    - Cada triângulo está contido em $ABCD$ ou em seu interior;
    - A soma das áreas dos triângulos é pelo menos $\frac{4n}{4n+1}$ da área do quadrilátero $ABCD$.

    Observação 1. *Na verdade, dá para trocar* $\frac{4n}{4n+1}$ *por* $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, *que só é pior para valores pequenos de* n.

21. (IMO) Determine todos os inteiros $n > 3$ tais que existem n pontos A_1, A_2, …, A_n no plano sem que haja três deles colineares e números reais r_1, r_2, …, r_n tais que, para todos i, j, k distintos, a área do triângulo $A_iA_jA_k$ é $r_i + r_j + r_k$.

22. (IMO) Uma configuração de 4027 pontos do plano dos quais 2013 são vermelhos e 2014 azuis, e não há três pontos colineares, diz-se *colombiana*. Traçando algumas retas, o plano fica dividido em várias regiões. Um conjunto de retas é *bom* para uma configuração colombiana se satisfaz as duas seguintes condições:

    - nenhuma reta passa por algum ponto da configuração;
    - nenhuma região contém pontos de ambas as cores.

    Encontrar o menor valor de k tal que, para qualquer configuração colombiana de 4027 pontos, há um conjunto bom de k retas.

23. (OBM) Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices consecutivos do pentágono, tais que

$$\text{área}\, P_iP_{i+1}P_{i+2} \leq \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq \text{área}\, P_jP_{j+1}P_{j+2}.$$

24. (Hungria) Seja P um polígono convexo com lados de medidas inteiras e perímetro ímpar. Prove que a área de P é maior ou igual a $\sqrt{3}/4$.

Bibliografia

1. D. Máximo, S. Feitosa, *Problemas sobre Pontos.* Eureka! 25.