Combinatória - Recorrência
Nível III

Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Semana Olímpica – Janeiro/2001 - Salvador

Resolução de
Equações de Recorrência

Veremos a solução do caso particular (e o mais comum em problemas de olimpíada) de equações de recorrência de grau 2 e cuja equação características possui raízes distintas.

Associemos a cada equação de recorrência de grau 2 do tipo

$$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1} \ (*)$$

a equação característica $\lambda^2=a\lambda+b$, cujas raízes são λ_1 e λ_2, isto é, $\lambda_1^2=a\lambda_1+b$ e $\lambda_2^2=a\lambda_2+b$, lembrando que assumimos $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Podemos reescrever (*) da seguinte forma

$$x_{n+1}-\lambda x_n=(a-\lambda)(x_n-\lambda x_{n-1})+(b+a\lambda-\lambda^2)x_{n-1}.$$

Substituindo k por k_1 e k_2, temos:

$$x_{n+1}-\lambda_1x_n=\lambda_2(x_n-\lambda_1x_{n-1})$$
$$x_{n+1}-\lambda_2x_n=\lambda_1(x_n-\lambda_2x_{n-1})$$

Fazendo cada uma dessas equações com índices cada vez menores e multiplicando-as ao final, teremos:

$$x_{n+1}-\lambda_1x_n=\lambda_2^n\,(x_1-\lambda_1x_0)$$
$$x_{n+1}-\lambda_2x_n=\lambda_1^n\,(x_1-\lambda_2x_0)$$

Subtraindo uma da outra:

$$(\lambda_2-\lambda_1)x_n=\lambda_2^n\,(x_1-\lambda_1x_0)-\lambda_1^n\,(x_1-\lambda_2x_0)$$

e o resultado, x_n, vem dividindo a equação toda por $(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$.

Fonte: Introdução à Teoria dos Números, José Pliínio de Oliveira Santos, Coleção Matemática Universitária, 1998.

Problemas

01. De quantas maneiras podemos formar palavras com n letras utilizando o alfabeto {a, b, c, d} se as letras a e b não devem aparecer juntas?

02. (Hungria–Israel/1997) Quantas sequências distintas de tamanho 1997 podem ser formadas usando cada uma das letras A, B, C um número ímpar de vezes (e nenhuma outra)?

03. (Itália/1996) Dado o alfabeto com três letras a, b, c, encontre o número de palavras com n letras contendo um número par de a's.

04. (Romênia/1998) Uma palavra de comprimento n é uma sequência ordenada $x_1x_2...x_n$, onde x_i é uma letra do alfabeto {a, b, c}. Denote por A_n o conjunto de palavras de comprimento n que não contém bloco x_ix_{i+1}, i=1, 2, ..., n−1, da forma aa ou bb e, por B, o conjunto de palavras de comprimento n nas quais nenhuma das subsequências $x_ix_{i+1}x_{i+2}$, i=1, 2, ..., n−2 contém todas as letras a, b, c. Prove que $|B_{n+1}|=3|A_n|$.

05. Seja $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^k$, $n \geq 0$. Mostre que, para $x \neq -1/4$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

06. Quantos subconjuntos há de um conjunto com n elementos?

07. Quantos subconjuntos de A_n = {1, 2, 3, ..., n} há sem números consecutivos?

08. Quantas palavras com *n* letras formadas a partir do alfabeto {0, 1, 2} não possui dígitos consecutivos cuja diferença absoluta seja no máximo 1?

09. Seja $f(n)$ o número de palavras com n letras, sem zeros vizinhos, formadas a partir do alfabeto {0, 1, 2}. Encontre uma recorrência e uma fórmula para $f(n)$.

10. Considere todas as palavras com n caracteres formadas a partir do alfabeto {0, 1, 2, 3}. Quantas delas tem um número par de (a) zeros, (b) zeros e uns?