Combo session

1. Problemas russos

01. Vinte e três inteiros positivos, não necessariamente distintos, são escritos em fila. Prove que é possível colocar parêntesis, sinais de mais e sinais de vezes entre eles de modo que a expressão obtida é um múltiplo de 2000.

02. Arnaldo escreveu os números de 1 a 64 em um tabuleiro 8×8 (um número em cada casa, cada número aparece uma vez), em qualquer ordem, e pode dizer a Bernaldo qual é a soma de quaisquer dois números em dois quadrados que têm um lado em comum. Bernaldo pode escolher o par de casas para o qual tem essa informação. Além disso, ele diz que os números 1 e 64 estão na mesma diagonal. Prove que Bernaldo consegue, com essas informações, descobrir as posições de todos os 64 números no tabuleiro.

03. Um jogo de video-game consiste no seguinte: em uma caverna formada por abrigos ligados por túneis está escondido um bandido. Cada jogada consiste em escolher um dos abrigos e iluminá-lo. Se o bandido está lá, você ganha o jogo; se não, as luzes são apagadas e o bandido se move para algum abrigo vizinho ligado por túnel. Você pode iluminar cada abrigo quantas vezes quiser.

Você tem estratégia vencedora se consegue planejar uma sequência finita de abrigos iluminados que sempre pega o bandido, não importando a posição inicial nem os movimentos que o bandido faz.

(a) Prove que a configuração que consiste de um abrigo central ligado a três caminhos disjuntos com três abrigos não admite estratégia vencedora.

(b) Encontre todas as configurações que não admitem estratégias vencedoras, mas admitem estratégia vencedora se qualquer um de seus túneis é bloqueado.

04. Sete cartas distintas são mostradas a Arnaldo, Bernaldo e Esmeralda e são embaralhadas. Arnaldo e Bernaldo recebem três cartas cada um e a carta que sobrou é (a) escondida ou (b) dada a Esmeralda.

Arnaldo e Bernaldo então dizem informações sobre as cartas. É possível que Arnaldo e Bernaldo consigam descobrir quais são as cartas do outro sem que Esmeralda, que está ouvindo tudo (ela entende todos os idiomas, de português a aramaico!), possa descobrir qual carta está com quem? (sim, esse problema tem dois itens)

05. Jade pensa em um número de dois algarismos (de 10 a 99) e Esmeralda tenta adivinhar esse número. Para tanto, ela fala números de dois algarismos. Uma tentativa tem *êxito* quando um dos algarismos está correto e o outro está errado por no máximo uma unidade. Por exemplo, se Jade escolhe 65, então 65, 64 e 75 são êxitos mas 63, 76 e 56 não são; além disso, a diferença entre 9 e 0 é igual a 9). Mostre que Esmeralda consegue uma estratégia que garante um êxito em 22 tentativas, mas não consegue uma estratégia que garante um êxito em 18 tentativas.

06. Arnaldo e Bernaldo colocam peças de damas alternadamente em casinhas em um tabuleiro 65×65. Cada linha ou coluna do tabuleiro pode ter no máximo duas peças de damas, e uma casinha pode ter no máximo uma peça. Quem não conseguir colocar peça na sua vez perde. Quem tem estratégia vencedora?

07. Cada casinha de um tabuleiro $m \times n$ é uma célula que pode estar viva ou morta. A cada minuto, todas as células vivas morrem simultaneamente e, ao mesmo tempo, cada célula morta que tem uma quantidade ímpar de células vivas vizinhas (ou seja, em casas que têm um lado em comum) é revivida. Encontre todos os valores de m e n tais que existe uma configuração inicial de células que vivam para sempre (ou seja, em todo momento existe pelo menos uma célula viva).

08. Cada expectador da primeira fila do cinema sentou-se em uma cadeira dessa fila. No final, a fila estava cheia, mas nenhum expectador estava no lugar certo. O lanterninha pode trocar quaisquer duas pessoas vizinhas nessa fila se, e somente se, as duas estiverem no lugar errado. É possível para o lanterninha fazer com que todos sentem-se no lugar certo?

09. O prefeito da cidade de Obemelândia é escolhido através de uma série de turnos. Em cada turno, se nenhum candidato tem mais de metade dos votos, o último colocado é eliminado da disputa e é realizado

um novo turno (nunca ocorrem empates nessa cidade!). Se algum candidato obtém mais da metade dos votos, ele é eleito prefeito e a eleição termina. Em cada turno, cada eleitor escolhe um candidato e continua votando nele até o fim da eleição ou até ele ser eliminado. Se um candidato é eliminado, todos os votos que eram dele vão para um único candidato.

Na última eleição houve 2002 candidatos e o prefeito eleito foi Prometaldo, que ficou em k-ésimo lugar no primeiro turno. Determine o maior valor possível de k se ele foi eleito no

(a) 2002º turno.

(b) 2001º turno.

10. A Terra Brasilis tem 15 cidades. Algumas delas são conectadas por voos, que são controlados por três companhias. Sabe-se que, mesmo se uma das companhias for interrompida, é possível ir de qualquer cidade a qualquer outra cidade, possivelmente com escalas, usando as outras duas companhias. Quantos voos essa cidade tem, no mínimo? Os voos de ida e volta são sempre controlados pela mesma companhia.

11. Arnaldo escolhe um número inteiro maior do que 100. Bernaldo não sabe qual é esse número, e diz um número inteiro maior do que 1. Se o número de Arnaldo é divisível por esse número, Bernaldo ganha; se não, Arnaldo subtrai o número dito por Bernaldo e Bernaldo deve dizer outro número, e o processo é repetido; Bernaldo vence se o número que disser dividir o último número obtido por Arnaldo. Arnaldo vence se obtém um número negativo. Bernaldo tem estratégia vencedora?

12. Um pedaço de chocolate tem o formato de um triângulo equilátero de lado n. Ele é dividido em tabletes no formato de triângulos equiláteros de lado 1 com lados paralelos ao lado do chocolate. Jade e Esmeralda jogam o seguinte jogo: cada secretária quebra um pedaço triangular (de lado arbitrário) do chocolate, quebrando ao longo de uma das divisões, e o come. A secretária que receber o último pedaço, um triângulo de lado 1, vence. Se alguma secretária não puder quebrar um pedaço triangular, o jogo termina e quem não puder jogar perde. Esmeralda começa. Quem tem estratégia vencedora? Discuta para os valores de n.

13. Em uma caverna há 100 prisioneiros. O dragão da caverna resolveu dar uma chance para que eles se libertem:

"Dou-lhes uma noite para conversarem. Então cada um de vocês será colocado em uma cela sozinho, e vocês não poderão mais comunicar-se entre si. De tempos em tempos eu escolherei um de vocês e o levarei para uma sala com uma lâmpada que inicialmente estará apagada. Ao sair da sala, você pode ligar ou desligar a lâmpada ao seu gosto. Se em algum momento algum de vocês me disser que todos já visitaram essa sala pelo menos uma vez, e isso for verdade, eu os libertarei; mas se for mentira, todos serão jogados aos crocodilos. E tenham certeza: nenhum de vocês deixará de visitar a sala, e garanto que nenhuma das visitas à sala se tornará a última."

Encontre uma estratégia para libertar os prisioneiros.

14. Trinta e dois dominós são colocados arbitrariamente em um tabuleiro 8×8, cobrindo completamente o tabuleiro. Então uma casinha é colocada a mais no tabuleiro, adjacente horizontalmente ao canto superior direito. Esmeralda pode retirar qualquer dominó do tabuleiro e colocá-lo em quaisquer duas casas vizinhas vazias (mas só pode fazer isso com um dominó de cada vez!). Prove que Esmeralda pode fazer com que todos os dominós fiquem horizontais.

15. Um inteiro positivo é *modesto* se tem no máximo 20 fatores primos distintos. Arnaldo e Bernaldo jogam o seguinte jogo: inicialmente há uma pilha de 2004! pedras. Cada jogador, começando por Arnaldo, tira alternadamente uma quantidade modesta de pedras da pilha (as quantidades podem mudar de jogada para jogada). Quem retirar a última pedra ganha. Quem tem estratégia vencedora?

16. Um baralho com 36 cartas (quatro naipes, nove de cada naipe) é colocado na frente de um mágico, com todas as faces para baixo. O mágico diz o naipe da carta de ciam; depois disso, a carta é mostrada a ele. Então o mágico diz o naipe da próxima carta, e assim por diante. O mágico deve acertar a maior quantidade possível de naipes.

Os versos das cartas são assimétricas, de modo que cada carta pode ser posicionada na pilha de duas maneiras, e o mágico pode ver qual é a orientação de cada carta. O assistente do mágico sabe a ordem das cartas na pilha, mas não pode mudar a ordem delas; mas ele pode mudar a orientação de cada carta.

É possível que o mágico e o assistente combinem o truque, antes do assistente saber a ordem das cartas, de modo a garantir que o mágico adivinhe o naipe de pelo menos

(a) 19 cartas?

(b) 23 cartas?

17. Corte um círculo em uma quantidade finita de regiões congruentes de modo que pelo menos uma das regiões não contenha, em sua fronteira, o centro do círculo.

Observação: muitas variantes desse problema estão em aberto:

- *Quais são os possíveis valores para a quantidade de regiões?*
- *Existe alguma divisão de modo que o diâmetro de cada região – a maior distância entre dois pontos da região – é menor do que o raio do círculo?*
- *É possível dividir o círculo em uma quantidade finita de regiões congruentes de modo que o centro pertença ao interior de alguma das regiões? Na verdade, não se sabe a resposta nem para polígonos regulares com 4 ou mais lados.*
- *É possível fazer uma divisão análoga (ou qualquer uma das variantes acima) em uma esfera?*

18. Sabe-se que é possível cortar um polígono em uma quantidade finita de pedaços e, com esses pedaços, montar qualquer outro polígono de mesma área. Mas é possível cortar qualquer triângulo em 1000 pedaços e, com os pedaços, montar um quadrado de mesma área?

19. Considere n dígitos não nulos em círculo. Esmeralda e Jade copiam $n-1$ desses algarismos em seus respectivos cadernos, lendo-os no sentido horário. Elas começam de pontos diferentes no círculo, mas obtêm o mesmo número!

Prove que o círculo pode ser dividido em dois ou mais arcos de modo que os números formados pelos dígitos em cada arco são iguais.

2. Problemas da Cone Sul

20. (2010/2) Marcam-se em uma reta 44 pontos, numerados $1, 2, 3, \ldots, 44$ da esquerda para a direita. Vários grilos saltam na reta. Cada grilo parte do ponto 1, salta por pontos marcados e termina no ponto 44. Além disso, cada grilo sempre salta de um ponto marcado a outro marcado com um número maior.

Quando todos os grilos terminaram de saltar, notou-se que para cada par i, j, com $1 \leq i < j \leq 44$, há um grilo que saltou diretamente do ponto i para o ponto j, sem pousar em nenhum dos pontos entre eles.

Determine a menor quantidade de grilos para que isso seja possível.

21. (2010/6) Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

(i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez.

(ii) A sequência

$$b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$$

é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

22. (2009/6) Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.

Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

23. (2006/2) Duas pessoas, A e B, jogam o seguinte jogo: eles retiram moedas de uma pilha que contém, inicialmente, 2006 moedas. Os jogadores jogam alternadamente retirando, em cada jogada, 1 a 7 moedas;

cada jogador guarda as moedas que retira. Se quiser, um jogador pode passar (não retirar moedas em sua vez), mas para isso deve pagar 7 moedas das que retirou da pilha em jogadas anteriores. Estas 7 moedas são colocadas em uma caixa separada e não interferem mais no jogo. Ganha quem retira a última moeda, e A começa o jogo.

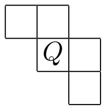
Determinar qual jogador pode assegurar a vitória, não importando como jogue o outro. Mostrar uma estratégia vencedora e explicar por que é vencedora.

24. (2006/3) Seja n um número natural. A sucessão finita α de inteiros positivos tem, entre seus termos, exatamente n números distintos (α pode ter números repetidos). Além disso, se de um de seus termos qualquer subtraímos 1, obtemos uma sucessão que tem, entre seus termos, pelo menos n números positivos distintos. Qual é o valor mínimo que pode ter a soma de todos os termos da sucessão α?

25. (2006/4) Daniel escreveu em uma lousa, de cima para baixo, uma lista de números inteiros positivos menores ou iguais a 10. Ao lado de cada número da lista de Daniel, Martín anotou a quantidade de vezes que esse número aparece na lista de Daniel e obteve assim uma lista de mesmo tamanho.

Se lemos a lista de Martín de baixo para cima obtemos a mesma lista de números que Daniel escreveu de cima para baixo. Encontre o maior tamanho que a lista de Daniel pode ter.

26. (2006/6) Dividimos o plano em casinhas quadradas de lado 1, traçando retas paralelas aos eixos coordenados. Cada casinha é pintada de branco ou preto. A cada segundo, recolorimos simultaneamente todas as casinhas, de acordo com a seguinte regra: cada casinha Q adota a cor que mais aparece na configuração de cinco casinhas indicadas na figura



O processo de recoloração é repetido indefinidamente.

(a) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que sempre há pelo menos uma casinha preta, não importando quantos segundos se passaram desde o início do processo.

(b) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que o número de casinhas pretas, após alguma quantidade de segundos, seja pelo menos 1010 vezes maior que o número inicial de casinhas pretas.