Cônicas Projetivas

Prof.Luciano Monteiro de Castro

lucianogmcastro@gmail.com

1. (OBM-U 2001) São dados um ponto O e uma reta r no plano. Para cada ponto P de r, seja r_P a reta perpendicular a OP passando por P. Prove que o conjunto $\{r_P | P \in R\}$ é o conjunto de todas as retas tangentes a uma parábola.

2. (OBM-U 2003) São dados uma parábola e um ponto A fora dela. Para cada ponto P da parábola, seja t a tangente à parábola por P e r a reta paralela ao eixo da parábola por P. A reta perpendicular a t por A corta r em Q. Prove que, ao variar P, o ponto Q percorre uma hipérbole equilátera.

3. (OIMU 2005) Uma tangente variável t à circunferência $\mathcal{C}_1$, de raio r_1, corta a circunferência $\mathcal{C}_2$, de raio r_2, nos pontos A e B. As tangentes a $\mathcal{C}_2$ em A e B cortam-se no ponto P. Determine, em função de r_1 e r_2, a distância entre os centros de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ para a qual o lugar geométrico de P ao variar t está contido em uma hipérbole equilátera.

   Obs: Uma hipérbole é equilátera se as suas assíntotas são perpendiculares.

4. Os vértices do triângulo ABC pertencem à hipérbole $xy = 1$. Demonstre que seu ortocentro também pertence a essa hipérbole.

5. (OBM-U 2006) Uma mesa de bilhar tem o formato de elipse e não tem caçapas. Quando uma bola bate em um ponto P na borda da mesa, ela segue uma direção simétrica em relação à reta normal à elipse em P. Prove que se uma bola parte de um ponto A da elipse e, após bater na mesa nos pontos B e C, retorna a A, então ela baterá novamente em B.

6. (OBM-U 2002) Considere duas elipses no plano $\mathbb{R}^2$ que se intersectam em 4 pontos. Nestes 4 pontos trace as retas tangentes às duas elipses, obtendo assim 8 retas. Prove que existe uma elipse (ou circunferência) tangente a estas 8 retas.

7. (VO 2005) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência S. Sejam r e s as retas tangentes a S passando por A e D, respectivamente. Sejam também $E = r \cap BC$, $F = s \cap BC$, $X = r \cap s$, $Y = AF \cap DE$ e $Z = AB \cap CD$. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares. Obs. suponha a existência de todos os pontos considerados acima.

8. (OBM-U 2006) Dada uma hipérbole e uma reta não paralela às assíntotas, determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da hipérbole paralelas à reta dada.

Obs: Uma corda de uma hipérbole é um segmento cujos extremos pertencem à hipérbole.

9. Dados no plano projetivo un triângulo $[A_1A_2A_3]$ e uma reta r que não passa por nenhum de seus vértices, sejam $\forall\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$, $B_i = r\cap A_jA_k, B_{i,j} = A_iB_i \cap A_jB_j$. Provar que as retas $A_kB_{i,j}$, $\forall\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ são concorrentes.

10. Sejam $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ quatro pontos do plano projetivo tais que três quaisquer nunca estão alinhados, e sejam $P_1 \in A_1A_2-\{A_1,A_2\}$, $P_2 \in A_2A_3-\{A_2,A_3\}$, $P_3 \in A_3A_4-\{A_3,A_4\}$, $P_4 \in A_1A_4-\{A_1,A_4\}$. Se $P_1P_2\cap P_3P_4 \in A_1A_3$, provar que $P_1P_4\cap P_3P_2 \in A_2A_4$.

11. Dado um triângulo ABC e uma reta r que não passa por nenhum de seus vértices nem é paralela a nenhum de seus lados, a reta que une cada vértice X ao ponto médio do segmento determinado em r pelos dois lados (retas-suporte) de ABC adjacentes a X corta o respectivo lado (reta-suporte) oposto no ponto X_1. Prove que A_1, B_1, C_1 são colineares.

12. São dadas duas retas d e d' e um ponto O fora delas. Sejam A e B dois pontos alinhados com O. Uma reta m passando por O corta d em P e d' em Q. Determine o lugar geométrico do ponto de intersecção entre as retas AP e BQ quando m varia.

13. São dadas duas retas p e q, que se cortam em O, e um ponto A. Duas retas passando por A, simétricas em relação a OA, cortam p e q em P e Q, respectivamente. Prove que a reta PQ passa por um ponto fixo.

14. São dados os pontos A e B e as retas p e q, passando por A, e r e s, passando por B. Uma reta variável a passando por A corta r em R e s em S, enquanto outra reta variável b passando por B corta p em P e q em Q. Determine os lugares geométricos de $PR\cap QS$ e de $PS\cap QR$.

15. Os lados (retas) BC, CA, AB de um triângulo ABC cortam uma reta r em P, Q, R, respectivamente. Sejam P', Q', R' três pontos de r tais que os segmentos PP', QQ', RR' têm o mesmo ponto médio I. Prove que as retas AP', BQ' e CR' são concorrentes.