CÔNICAS PROJETIVAS – SEMANA OLÍMPICA 2015 – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

PROF. LUCIANO MONTEIRO DE CASTRO

Conteúdo

Introdução

Este material é uma adaptação de notas de aula (incompletas) de um curso de treinamento para Olimpíadas de Matemática. Nosso foco nesta aula da Semana Olímpica 2015 é apresentar a representação matricial das cônicas projetivas e sua aplicação na dedução de propriedades concretas dessas figuras. Para isso, supomos que o leitor está familiarizado com Álgebra Linear básica.

Espaços Projetivos

Se V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, definimos o *espaço projetivo gerado por* V, $\mathbb{P}(V)$, como o espaço quociente $(V-\{0\})/\sim$, onde $\sim$ representa a seguinte relação de equivalência em $V-\{0\}$ (0 aqui significa o vetor nulo de V).

$$u \sim v \iff u = \lambda v, \quad \text{para algum escalar } \lambda \in \mathbb{K}.$$

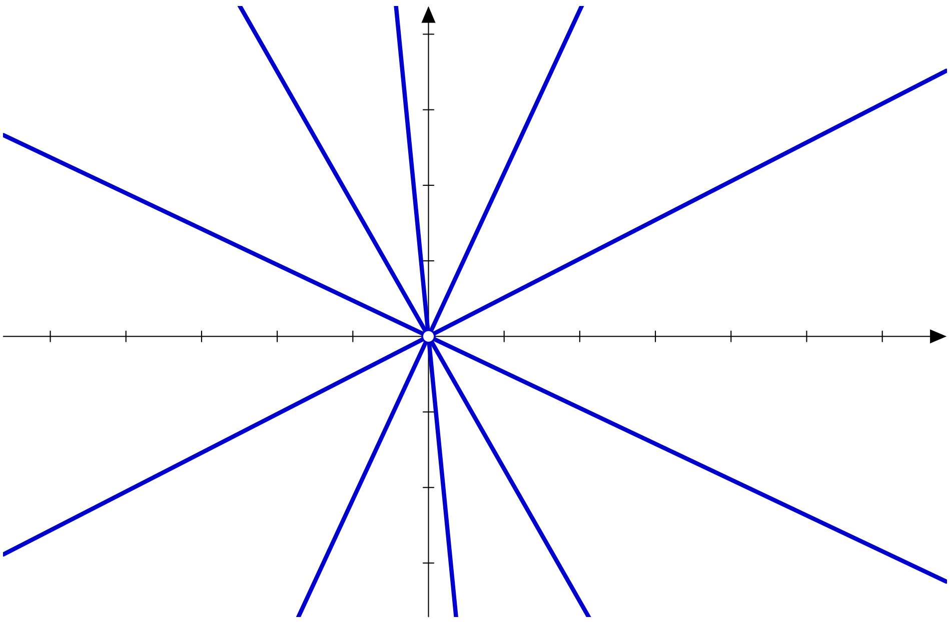
(Observe que a própria definição implica que u, v e λ são não nulos).

Chamaremos os elementos de $\mathbb{P}(V)$ de *pontos*. Assim, cada ponto de $\mathbb{P}(V)$ é uma classe de equivalência de vetores de V pela relação $\sim$. Para $v \in V\backslash\{0\}$, temos que a classe de v, que representaremos por $[v]$, é o conjunto de todos os vetores não nulos de V que são múltiplos de, ou paralelos a, v.

Assim, alternativamente, podemos considerar $\mathbb{P}(V)$ como o conjunto de todos os subespaços de V de dimensão 1. Ambos os pontos de vista têm suas vantagem, e usaremos indistintamente um ou outro.

Quando V tem dimensão finita $n+1$, diremos que $\mathbb{P}(V)$ tem dimensão n, e devido ao isomorfismo entre V e $\mathbb{K}^{n+1}$, podemos identificar $\mathbb{P}(V)$ com o espaço $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, para o qual também usaremos a notação $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e ao qual chamaremos também de *espaço projetivo n-dimensional sobre* $\mathbb{K}$.

1. A Reta Projetiva Real: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



Como boa parte do curso será sobre espaços projetivos reais, normalmente vamos deixar o corpo $\mathbb{R}$ subentendido e denotaremos a reta projetiva real simplesmente por $\mathbb{P}^1$. Seguindo a definição geral vista anteriormente, cada ponto de $\mathbb{P}^1$ é uma classe de equivalência de vetores de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ por $\sim$, ou seja, um conjunto de vetores paralelos (e não nulos) no plano real. Assim, cada ponto de $\mathbb{P}^1$ pode ser visto como uma reta de $\mathbb{R}^2$ passando pela origem.

1.1. **Coordenadas Projetivas ou Coordenadas Homogêneas.**

Escolhida uma base para $\mathbb{R}^2$ (por exemplo, a base canônica), cada vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$ possui coordenadas (v_1, v_2), não ambas nulas. Existe um único ponto $P \in \mathbb{P}^1$ correspondente à classe de equivalência de $[v]$. Ao invés de escrever $P = [(v_1, v_2)]$, simplificaremos a notação para $P = [v_1, v_2]$, e diremos que $[v_1, v_2]$ são as *coordenadas projetivas* de P. As coordenadas projetivas também são chamadas de *coordenadas homogêneas*, devido à propriedade de continuarem representando o mesmo ponto ao serem multiplicadas por um escalar não nulo, o que decorre diretamente da definição de espaço projetivo. Assim, por exemplo, o ponto $[1,-2] \in \mathbb{P}^1$ é o mesmo que $[2,-4]$, $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ou $[\pi, -2\pi]$.

Exercício 1.1. Quando duas bases de $\mathbb{R}^2$ produzem coordenadas iguais para todos os pontos de $\mathbb{P}^1$?

1.2. **Relação com a reta real.** Até agora temos uma definição pouco intuitiva de um objeto chamado *reta projetiva* formado por coisas chamadas *pontos*, sendo que na verdade os pontos são retas, todas passando por um ponto fixo, gerando um plano. Mas para *fazermos geometria* queremos uma forma mais prática de visualizar este novo objeto.

Ao estudarmos um espaço quociente sob uma relação de equivalência, é comum escolhermos um único representante para cada classe. Por exemplo, ao estudarmos os inteiros módulo 7, podemos nos restringir ao conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Para o estudo de $\mathbb{P}^1$, a maneira mais usual de escolher um representante para cada classe de equivalência é considerar uma reta contida em $\mathbb{R}^2$ que *NÃO* passe pela origem. Com uma única exceção, tal reta "corta" cada ponto da reta projetiva uma única vez (aqui, como habitual, identificamos os pontos de $\mathbb{R}^2$ com os vetores de mesmas coordenadas, ou seja, vetores com origem em $(0, 0)$ e extremidade no ponto correspondente). Por exemplo, se consideramos a reta $r : y = 1$ de $\mathbb{R}^2$, cada ponto $[X, Y] \in \mathbb{P}^1$ com $Y \neq 0$ "corta" r no ponto $\left(\frac{X}{Y}, 1\right)$, que é o único representante de $[X, Y]$ em r. Reciprocamente, todo ponto $(x, 1)$ de r pertence a uma única classe de equivalência $[x, 1] \in \mathbb{P}^1$.

figura

Mas, como já havíamos mencionado, há uma exceção. Se $Y = 0$, o ponto $[X, Y] = [X, 0]$ não possui representante sobre r. Note que há apenas um ponto de $\mathbb{P}^1$ nesta situação, já que como X e Y não podem ser ambos nulos, temos $X \neq 0$ e portanto $[X, 0] = \left[\frac{X}{X}, \frac{0}{X}\right] = [1, 0]$. Ou seja,

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[x, 1] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1, 0]\}.$$

Assim, a reta projetiva real pode ser visualizada como o resultado de se acrescentar um ponto à reta real. Tal ponto é muitas vezes denominado o *ponto do infinito*. De fato, observamos que quando fazemos um ponto de r tender a infinito, em ambos os sentidos, a reta que representa sua classe de equivalência em $\mathbb{P}^1$ vai se aproximando da reta $y = 0$, classe do *ponto do infinito* $[1, 0]$.

Exercício 1.2. Escolhendo-se qualquer outro ponto de $\mathbb{P}^1$ como *ponto do infinito*, também há uma bijeção entre o conjunto dos outros pontos e $\mathbb{R}$. Defina explicitamente uma bijeção entre $\mathbb{P}^1 - \{P\}$ e $\mathbb{R}$ para

(i) $P = [3, -5]$;
(ii) $P = [P_1, P_2]$, com $P_1, P_2 \neq 0$.

1.3. **Teorema Fundamental da Geometria Projetiva.** O seguinte teorema é um caso particular do teorema mais geral que dá nome a esta seção.

Teorema 1.3. *Sejam A, B e C três pontos distintos de $\mathbb{P}^1$. É sempre possível escolher uma base de $\mathbb{R}^2$ para a qual as coordenadas projetivas desses pontos sejam*

$$A = [1, 0], \quad B = [0, 1], \quad C = [1, 1].$$

Demonstração. Sejam v_A, v_B e v_C representantes quaisquer das classes de equivalência de A, B e C em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Como $A \neq B$, v_A e v_B não são paralelos, logo são independentes e formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja (a, b) a representação de v_C nesta base. Como C é distinto de A e de B, a e b são não nulos, pois v_C não pode ser paralelo a v_A ou v_B. Escolhendo a base (av_A, bv_B) para $\mathbb{R}^2$, temos $A = [v_A] = [av_A] = [1, 0]$, $B = [v_B] = [bv_B] = [0, 1]$ e $C = [v_C] = [av_A + bv_B] = [1, 1]$. □

Este teorema nos permite falar de coordenadas projetivas sem a necessidade de voltar ao espaço gerador $\mathbb{R}^2$. Dizemos que A, B e C como no teorema formam uma *referência projetiva* de $\mathbb{P}^1$, representada por $(A, B; C)$. Repare que a base de $\mathbb{R}^2$ cuja existência é provada no teorema não é única. Mas as coordenadas projetivas induzidas por ela o são, como prova o seguinte

Exercício 1.4. Prove que um quarto ponto D tem sempre as mesmas coordenadas projetivas em uma referência projetiva fixa $(A, B; C)$.

Exercício 1.5. Se $A = [1, -2]$, $B = [3, 1]$ e $C = [0, 7]$, determine as coordenadas do ponto $D = [20, 13]$ na referência projetiva $(A, B; C)$.

2. O Plano Projetivo Real: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Como na seção anterior, normalmente deixaremos o corpo $\mathbb{R}$ subentendido e denotaremos o plano projetivo real simplesmente por $\mathbb{P}^2$.

Nossos pontos continuam sendo retas passando pela origem, sendo que agora as retas estão contidas em $\mathbb{R}^3$. Seguindo a inspiração do caso anterior, podemos escolher um representante para cada classe de equivalência cortando essas retas pelo plano $z = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

Porém, desta vez, perdemos mais do que um ponto. Todos os pontos do plano projetivo correspondentes a retas paralelas ao plano $z = 1$ ficam sem representantes. Este conjunto de retas tem exatamente a mesma estrutura do que o conjunto de classes de equivalência que define a reta projetiva, portanto faz sentido imaginar que agora temos uma *reta (projetiva) de pontos no infinito*. Assim, podemos considerar que $\mathbb{P}^2$ é obtido acrescentando-se uma *reta do infinito* ao plano real.

Figura

Formalmente, para cada ponto $P = [X, Y, Z]$ do plano projetivo há duas possibilidades:

i) Se $Z \neq 0$, sendo $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$ temos $[X, Y, Z] = [x, y, 1]$, de forma que o ponto P possui um único representante no plano real $z = 1$. Reciprocamente, cada ponto $(x, y, 1)$ do plano $z = 1$ corresponde a um único ponto P com $Z \neq 0$. Logo há uma bijeção natural entre $\mathbb{R}^2$ e os pontos de $\mathbb{P}^2$ com coordenada projetiva Z não nula.

ii) Se $Z = 0$, ao ponto $P = [X, Y, 0]$ podemos associar bijetivamente o ponto $[X, Y] \in \mathbb{P}^1$, logo há uma bijeção natural entre os pontos que não têm representante no plano real $z = 1$, os chamados *pontos no infinito* e a reta projetiva real. Isso justifica que apelidemos este conjunto de pontos de *reta do infinito*.

3. Retas em $\mathbb{P}^2$

Acabamos de denominar *reta do infinito* a um subconjunto de $\mathbb{P}^2$ formado por retas coplanares de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Coerentemente, chamaremos qualquer subconjunto desse tipo de uma *reta* de $\mathbb{P}^2$. Mais formalmente, cada subespaço S de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ corresponde a uma reta de $\mathbb{P}^2$, formada pelo subconjunto dos pontos cujos representantes pertencem a S. Note que tal subconjunto está bem definido, pois se um vetor pertence a S todos os seus múltiplos também pertencem a S.

Como dois vetores não nulos e não paralelos (independentes) de $\mathbb{R}^3$ definem um único subespaço de dimensão 2, temos que dois pontos distintos de $\mathbb{P}^2$ definem uma única reta. Assim, um terceiro ponto pertence à reta definida por outros dois se, e somente se, um representante qualquer de sua classe de equivalência pertence ao subespaço gerado por representantes dos outros dois. Isto nos proporciona o seguinte

Lema 3.1. Condição de alinhamento de três pontos. *Os pontos A, B e C do plano projetivo estão alinhados se, e somente se, é nulo o determinante da matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas desses pontos em uma determinada referência projetiva.*

Corolário 3.2. *As retas do plano projetivo são os conjuntos-solução das equações homogêneas de primeiro grau*

$$aX + bY + cZ = 0,$$

onde $[X, Y, Z]$ representam as coordenadas homogêneas de um ponto genérico de $\mathbb{P}^2$ e a, b, c são constantes (reais) não todas nulas.

Demonstração. O ponto $[X, Y, Z]$ pertence à reta definida por dois pontos distintos $A = [A_1, A_2, A_3]$ e $B = [B_1, B_2, B_3]$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} Z = 0.$$

Esta última equação é homogênea de primeiro grau em X, Y, Z, e seus coeficientes não são todos nulos porque os pontos A e B são distintos.

Reciprocamente, supondo $a \neq 0$ sem perda de generalidade, as soluções de $aX + bY + cZ = 0$ são os pontos da reta definida por $[b, -a, 0]$ e $[c, 0, -a]$. $\square$

Exercício 3.3. Determine a condição para que duas equações homogêneas de primeiro grau representem a mesma reta.

Teorema 3.4. Teorema Fundamental aplicado ao Plano Projetivo. *Sejam* A, B, C, D *quatro pontos distintos do plano projetivo tais que quaisquer três entre eles não pertencem a uma mesma reta. É sempre possível escolher uma base de* $\mathbb{R}^3$ *para a qual as coordenadas projetivas desses pontos sejam*

$$A = [1, 0, 0], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 0, 1], \quad D = [1, 1, 1].$$

Demonstração. Exercício. □

Agora estamos prontos para provar nosso primeiro teorema importante.

Teorema 3.5. Teorema de Desargues. *Sejam* ABC *e* $A'B'C'$ *dois triângulos no plano projetivo tais que as retas que unem vértices correspondentes são concorrentes, ou seja, existe um ponto* O *pertencente às retas* AA'*,* BB' *e* CC'*. Então os lados correspondentes (*AB *e* $A'B'$*,* BC *e* $B'C'$*,* CA *e* $C'A'$*) intersectam-se em pontos colineares.*

Demonstração. Escolhendo a referência projetiva $(A, B, C; O)$, a reta OA tem equação $Y = Z$ (pois tanto O como A são soluções dessa equação). A é o único ponto desta reta com coordenadas Y e Z nulas, logo A' possui coordenadas $[a, 1, 1]$, com $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, $B' = [1, b, 1]$, $C' = [1, 1, c]$, com $b, c \in \mathbb{R}$. A reta BC tem equação $X = 0$, logo o ponto P de intersecção desta reta com $B'C'$ tem coordenadas $P = [0, P_2, P_3]$ tais que

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 0 \iff (1-c)P_2 + (1-b)P_3 = 0,$$

logo $P = [0, b-1, 1-c]$. Analogamente, $Q = CA \cap C'A'$ e $R = AB \cap A'B'$ têm coordenadas $Q = [1-a, 0, c-1]$ e $R = [a-1, 1-b, 0]$. Para concluir que P, Q e R são colineares basta verificar que

$$\begin{vmatrix} 0 & b-1 & 1-c \\ 1-a & 0 & c-1 \\ a-1 & 1-b & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que pode ser feito observando que a soma das linhas é nula. □

4. Dualidade

Definida uma referência projetiva em $\mathbb{P}^2$, cada vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - 0$ pode ser associado à reta de equação

$$aX + bY + cZ = 0 \tag{4.1}$$

no plano projetivo. Dois vetores definem a mesma reta se, e somente se, são paralelos (ou múltiplos, ou dependentes) (exercício (3.3)), ou seja, quando pertencem à mesma classe de equivalência para a relação $\sim$. Isso nos permite associar coordenadas homogêneas também às retas de $\mathbb{P}^2$, do mesmo modo que fazemos com os seus pontos. Mais especificamente, se r é a reta de equação (4.1), escreveremos $r = \langle a, b, c\rangle$, e diremos que $\langle a, b, c\rangle$ são as *coordenadas da reta* r, e para todo λ escalar não nulo, $\langle a, b, c\rangle = \langle \lambda a, \lambda b, \lambda c\rangle$.

Denominamos *dual* de $\mathbb{P}^2$, representado por $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$ ao plano projetivo cujos pontos têm as mesmas coordenadas das retas de $\mathbb{P}^2$ (ou cujos pontos *são* essas retas). Dessa forma, a equação (4.1) pode ser interpretada de duas formas:

- *O ponto de coordenadas* $[X, Y, Z]$ *pertence à reta de coordenadas* $\langle a, b, c\rangle$ *em* $\mathbb{P}^2$.
- *A reta de coordenadas* $[X, Y, Z]$ *passa pelo ponto de coordenadas* $\langle a, b, c\rangle$ *em* $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$.

Ao fato de uma reta passar por um ponto ou de um ponto pertencer a uma reta denominaremos *incidência*, ou seja, diremos que o ponto e a reta são *incidentes.* Como o plano projetivo e o seu dual são isomorfos, obtemos o seguinte

Teorema 4.1. Princípio de Dualidade*: A toda proposição sobre pontos, retas e incidências no plano projetivo associamos sua* proposição dual *substituindo cada palavra "ponto"pela palavra "reta", cada palavra "reta "pela palavra "ponto", e mantendo as relações de incidência. Toda proposição tem o mesmo valor lógico que sua proposição dual.*

Nessa dualização, é comum representar um ponto por uma letra maiúscula e sua reta dual pela mesma letra, mas minúscula, e vice-versa. Outra notação comum é acrescentar um "*" ao símbolo de um ponto ou reta para representar seu dual.

A tabela a seguir contém alguns exemplos de proposições e suas respectivas duais.

Proposição	Dual
Os pontos A, B e C são colineares	As retas a, b e c são concorrentes
A reta r intersecta as retas s e t nos pontos P e Q	As retas traçadas do ponto R aos pontos S e T são p e q.
Os quatro pontos A, B, C, D definem 6 retas distintas XY com $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.	As quatro retas a, b, c, d definem 6 pontos distintos $x \cap y$ com $x, y \in \{a, b, c, d\}$.

Exercício 4.2. Faça um desenho para cada par de proposições duais da tabela anterior.

BURACO

5. Cônicas

Denominamos *cônica* ao conjunto dos pontos $[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2$ que são solução de uma equação homogênea de segundo grau em X, Y, Z, ou seja uma equação do tipo

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dYZ + 2eZX + 2fXY = 0. \tag{5.1}$$

Esta equação pode ser convenientemente escrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

Por este motivo chamaremos de *matriz da cônica* à matriz simétrica 3×3

$$M = \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}.$$

Quando M é invertível dizemos que a cônica é *não degenerada*.

Note que a condição para que um ponto pertença a uma cônica independe do representante escolhido para o ponto, já que a equação é homogênea. Note também que ao multiplicarmos a equação (5.1) por uma constante não nula (o que equivale a multiplicar a matriz M por essa mesma constante) o conjunto dos pontos da cônica permanece exatamente o mesmo. Assim, a cônica representada por essa equação pode ser associada bijetivamente ao ponto $[a, b, c, d, e, f]$ de $\mathbb{P}^5$. Podemos dizer então que as cônicas de $\mathbb{P}^2$ formam um espaço projetivo de dimensão 5. Tal espaço projetivo pode ser obtido a partir do espaço vetorial das matrizes simétricas 3×3 (de dimensão 6). Assim, cada cônica de $\mathbb{P}^2$ está associada a uma classe de equivalência de matrizes simétricas 3×3, e uma representante qualquer dessa classe será chamada de *matriz da cônica*.

5.1. **Polaridade definida por uma cônica.** Seja $\mathcal{C}$ uma cônica no plano projetivo. Vamos simplificar a (ou abusar da) notação e denominar também por $\mathcal{C}$ a uma matriz qualquer de $\mathcal{C}$ (Em vez de chamar a matriz de M e dizer $\mathcal{C} = [M]$). Utilizaremos também a tradicional representação matricial para vetores, ou seja, serão considerados matrizes-coluna. Faremos uma nova simplificação (ou abuso) de notação para pontos $P \in \mathbb{P}^2$ e chamaremos também de P à matriz-coluna correspondente a um vetor qualquer da classe de equivalência de P. Isso nos permitirá escrever $\mathcal{C}P$ para o resultado do produto de uma matriz de $\mathcal{C}$ por um vetor representante de P. O resultado é outra matriz coluna, ou seja, outro vetor de $\mathbb{R}^3$. Mudar os representantes de $\mathcal{C}$ e P apenas multiplica $\mathcal{C}P$ por uma constante, de modo que $\mathcal{C}P$ define uma única classe de equivalência de $\left(\mathbb{R}^3 - 0\right) / \sim$, que pode ser interpretada como um ponto ou uma reta do plano projetivo. Como veremos a seguir, a segunda alternativa é geometricamente muito mais rica.

Definição 5.1. Dada uma cônica não degenerada $\mathcal{C}$, denominamos *polaridade* em relação a $\mathcal{C}$ à transformação projetiva $\mathcal{C} : \mathbb{P}^2 \to \left(\mathbb{P}^2\right)^*$ que associa a cada ponto P do plano projetivo a reta p de coordenadas $\mathcal{C}\mathsf{P}$ no mesmo plano. Neste caso, diremos que p é a *reta polar* de P em relação a $\mathcal{C}$.

Uma consequência imediata desta definição e da definição de cônica é o seguinte fato:

Os pontos de uma cônica são exatamente aqueles que pertencem às suas próprias polares.

(Basta observar que a versão matricial da equação (5.1) traduz-se como $\mathsf{P}^t\mathcal{C}\mathsf{P} = 0$, e como $\mathsf{p} = \mathcal{C}\mathsf{P}$, isto equivale a $\mathsf{P}^t\mathsf{p} = 0$, ou seja, $\mathsf{P} \in \mathsf{p}$).

A reta polar de um ponto P pertencente à cônica também é chamada de *reta tangente* à cônica no ponto.

Exercício 5.2. Prove que esta definição de reta tangente coincide com a noção habitual do termo, ou seja, uma reta é tangente a uma cônica no ponto P se, e somente se, P é o único ponto de interseção entre a reta e a cônica.

Teorema 5.3. *Se A e B são dois pontos distintos do plano projetivo e a e b são suas respectivas polares em relação à cônica não degenerada $\mathcal{C}$, então*

$$\mathsf{A} \in \mathsf{b} \iff \mathsf{B} \in \mathsf{a}.$$

Demonstração. $\mathsf{A} \in \mathsf{b} \iff \mathsf{A}^t(\mathcal{C}\mathsf{B}) = 0 \iff \left(\mathsf{A}^t\mathcal{C}\mathsf{B}\right)^t = 0 \iff \mathsf{B}^t\mathcal{C}^t\mathsf{A} = 0 \iff \mathsf{B}^t(\mathcal{C}\mathsf{A}) = 0 \iff \mathsf{B} \in \mathsf{a}$ (Utilizamos que $\mathcal{C}$ é uma matriz simétrica, logo igual a sua transposta). □

Teorema 5.4. Construção da reta polar usando apenas régua. *Seja ABCD um qudrilátero inscrito em uma cônica não degenerada $\mathcal{C}$. Sejam $\mathsf{P} = \mathsf{AC} \cap \mathsf{BD}$, $\mathsf{Q} = \mathsf{AB} \cap \mathsf{CD}$, $\mathsf{R} = \mathsf{BC} \cap \mathsf{DA}$ os vértices do triângulo diagonal de ABCD. Então o triângulo PQR é* autopolar *em relação à cônica $\mathcal{C}$, ou seja, a polar de cada vértice é a reta definida pelo lado oposto.*

Demonstração. Usando a referência projetiva $(\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}; \mathsf{A})$, obtemos $\mathsf{B} = [1, -1, 1]$, $\mathsf{C} = [-1, 1, 1]$ e $\mathsf{D} = [1, 1, -1]$. Para que os pontos A, B, C e D sejam soluções para a equação (5.1) devemos ter

$$\begin{cases} a + b + c + 2d + 2e + 2f = 0 \\ a + b + c + 2d - 2e - 2f = 0 \\ a + b + c - 2d + 2e - 2f = 0 \\ a + b + c - 2d - 2e + 2f = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

Logo a matriz de $\mathcal{C}$ é diagonal com traço $a + b + c = 0$. Como a cônica é não degenerada, a, b, c são não nulos. A polar p de $\mathsf{P} = [1, 0, 0]$ tem coordenadas $\mathcal{C}\mathsf{P} = \langle a, 0, 0\rangle = \langle 1, 0, 0\rangle$, logo tem equação $\mathsf{X} = 0$, o que prova que $\mathsf{p} = \mathsf{QR}$. Para as polares de Q e R a demonstração é análoga. □

Corolário 5.5. *Seja P um ponto não pertencente à cônica não degenerada $\mathcal{C}$ e seja r uma reta passando por P que corta a cônica em dois pontos distintos A e B. Então r corta a reta polar de P em relação a $\mathcal{C}$ no conjugado harmônico de P em relação a A e B.*

Demonstração. Exercício □