Contagem

Professor Matheus Secco

29 de janeiro de 2015

1 Ilustrando algumas técnicas

Bijeções (IMC 12) Para cada inteiro positivo n, seja $p(n)$ o número de maneiras de expressar n como soma de inteiros positivos. Por exemplo, $p(4) = 5$, porque $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. Defina também $p(0) = 1$. Prove que $p(n) - p(n-1)$ é o número de maneiras de expressar n como soma de inteiros, sendo que cada um deles é maior do que 1.

Demonstração. Dividiremos as partições de n em dois conjuntos: A é o conjunto das partições que não contêm 1 em sua representação e B é o conjunto das partições restantes. Queremos mostrar que $p(n) - p(n-1) = n(A)$. Como $p(n) = n(A) + n(B)$, basta provar que $n(B) = p(n-1)$. Agora é simples: de fato, dada uma partição que contém 1 em sua representação, retire esse 1, obtendo uma partição de $n-1$. É fácil ver que tal operação é reversível e, portanto, a bijeção está feita. □

Recorrências Determine o número de sequências de n dígitos que podemos formar com os números 0, 1 ou 2, de modo que não existam dois zeros consecutivos.

Demonstração. Diremos que os números que satisfazem tal propriedade do enunciado são *legais*. Seja x_n a quantidade de números legais de n dígitos. Há dois tipos de números legais de $n+2$ dígitos: i) aqueles que terminam em 0 ; ii) aqueles que não terminam em 0.
Contaremos inicialmente os do tipo i):
Se o número termina em 0, o seu penúltimo algarismo deve ser 1 ou 2 e daí os n primeiros dígitos podem formar qualquer número legal. Logo, aqui há $2x_n$ números deste tipo.
Agora, contaremos os do tipo ii):
Como o número não termina em 0, os $n+1$ primeiros dígitos podem formar qualquer número legal e ainda devemos escolher o último algarismo, que pode ser 1 ou 2. Logo, aqui há $2x_{n+1}$ números.
Então, temos que $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$. Resolvendo a recorrência, encontraremos que $x_n = (1+\sqrt{3})^n + \frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\sqrt{3})^n$. □

Inclusão-Exclusão Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada. Considere que carros de uma mesma equipe são idênticos.

Demonstração. Seja A_i o conjunto das formações que possuem a equipe i com carros alinhados. Queremos, portanto, encontrar $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$.
Temos que:
$|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_5| = 5\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$
$|A_1 \cap A_2| = \cdots = |A_4 \cap A_5| = 5\cdot 4\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \cdots = |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 5\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{4}{2}$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \cdots = |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_4| = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$
Finalmente, o número desejado é $113400 - 5\cdot 5\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2} + 10\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{4}{2} - 10\cdot -5\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{4}{2} + 5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 - 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 113400 - 63000 + 18000 - 3600 + 600 - 120 = 65280$. $\square$

2 Problemas

1. (Putnam 96) Um conjunto A é dito *egoísta* se a cardinalidade de A pertence a A. Determine a quantidade de subconjuntos egoístas de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não possuem um subconjunto próprio egoísta.

2. (Canadá 83) Seja n um inteiro positivo e seja $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que o número de permutações de S sem pontos fixos e o número de permutações de S com exatamente um ponto fixo diferem de 1.

3. (Cone Sul 97) Seja $n > 3$ um número natural. Demonstre que entre os múltiplos de 9 menores que 10^n, há mais números com soma de seus algarismos igual a $9(n-2)$ do que números com soma de seus algarismos igual a $9(n-1)$.

4. (IMO 79) Sejam A e E dois vértices opostos de um octógono. Um sapo começa num ponto A. De qualquer vértice, excetuando E, o sapo pode pular para um dos dois vértices adjacantes. Quando o sapo alcança o vértice E, ele para. Seja a_n o número de caminhos distintos, com exatamente n pulos, terminando em E. Prove que $a_{2n-1} = 0$ e $a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$.

5. (Romênia 97) Os vértices de um dodecágono regular devem ser coloridos de vermelho ou azul. Encontre o número de colorações que não contêm subpolígonos regulares monocromáticos.

6. (Romênia 00) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo. Encontre o número de funções $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ satisfazendo a seguinte propriedade: $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$, para todo $1 \leq k \leq n-1$.

7. (Catalan) Pipoco trabalha no cinema OBM, que tem capacidade de 200 assentos. Na noite de estreia de ”Você quer ser ouro na IMO?”, 200 pessoas fazem uma fila para comprar ingressos para o filme. O custo de cada ticket é de 5 reais. Entre as 200 pessoas da fila, 100 possuem uma nota de 5 reais e as outras 100 possuem uma nota de 10 reais. Pipoco, que é um tanto lesado, esqueceu de pegar dinheiro para troco nesta noite. As 200 pessoas estão em uma ordem aleatória na fila e elas não estão

dispostas a esperar o seu troco chegar, quando estiverem comprando seu ticket. Qual a probabilidade de que Pipoco conseguirá vender todos os ingressos com sucesso?

8. (Romênia 98) Uma palavra de tamanho n é uma sequência ordenada $x_1x_2\dots x_n$, onde x_i é uma letra do conjunto a, b, c. Denote por A_n o conjunto das palavras de tamanho n que não contêm dois termos consecutivos iguais a aa ou bb e por B_n o conjunto das palavras de tamanho n que não contêm três termos consecutivos iguais a abc ou uma permutação de abc. Prove que $|B_{n+1}| = 3|A_n|$.

9. (IMO 11 - P4) Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela. Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

10. (Putnam 02) Um subconjunto não vazio $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ é *codiloco* se a média aritmética de seus elementos é um inteiro. Prove que a quantidade de subconjuntos codilocos tem a mesma paridade que n.

11. (IMOSL 97) Na Alândia, há n rapazes e n garotas, e cada garota conhece todos os rapazes. Na Belândia, há n garotas $g_1, g_2, \dots, g_n$ e $2n-1$ rapazes $r_1, r_2, \dots, r_{2n-1}$. A garota g_i, $i = 1, 2, \dots, n$, conhece os rapazes $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$ e nenhum dos outros. Para cada $r = 1, 2, \dots, n$, sejam $A(r)$ e $B(r)$ o número de maneiras é possível escolhermos r garotas de Alândia e Belândia, respectivamente, e r rapazes da mesma cidade podem formar r pares, de modo que cada garota forme par com um rapaz que conhece. Prove que $A(r) = B(r)$ para $r = 1, 2, 3 \dots, n$.

12. Há n carros numerados, de 1 até n, e uma fileira com n lugares para estacionar, também numerados de 1 até n. Cada carro i tem seu lugar favorito a_i; quando vai estacionar, dirige-se ao seu lugar favorito; se ele está livre, estaciona ali, caso contrário, avança para o próximo lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

13. (IMOSL 08) Determine, em função de n, n inteiro positivo, a quantidade de permutações $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ com a seguinte propriedade:

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \quad \text{é divisível por } k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

14. (IMO 89 - P6) Uma permutação $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, onde n é um inteiro positivo, é dita *bacana* se $|x_i - x_{i+1}| = n$ para pelo menos um $i \in 1, 2, \dots, 2n-1$. Prove que, para cada n, há mais permutações bacanas do que não-bacanas.

15. Há n carros numerados, de 1 até n, e uma fileira com n lugares para estacionar, também numerados de 1 até n. Cada carro i tem seu lugar favorito a_i; quando vai estacionar, dirige-se ao seu lugar favorito; se ele está livre, estaciona ali, caso contrário, avança para o próximo lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

16. (Lucas) De quantas maneiras podem n casais sentar numa mesa circular de maneira que há pelo menos um homem entre quaisquer duas mulheres e não há nenhum homem sentado ao lado de sua esposa?

17. (Romênia 2003) Em uma competição de matemática, participam $2n$ estudantes. Cada um deles submete um problema para o júri. Em seguida, o júri propõe para cada estudante um dos $2n$ problemas submetidos (todos os problemas submetidos são utilizados). Esta competição é dita *justa* se existem n competidores que receberam os problemas propostos pelos outros n competidores. Prove que o número de maneiras em que os problemas podem ser distribuídos para se formar uma competição justa é um quadrado perfeito.

18. (IMOSL 07) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais os números do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ podem ser coloridos de vermelho ou azul, com a seguinte condição acontecendo: o conjunto $S\ timesS \times S$ contém exatamente 2007 triplas ordenadas (x, y, z) tais que:
(i) x, y, z são da mesma cor
(ii) $x + y + z$ é divisível por n

19. (Balcânica 14) Seja n um inteiro positivo. Um hexágono regular de lado n é dividido em triângulos equiláteros de lado 1 através de retas paralelas a seus lados. Encontre o número de hexágonos regulares cujos vértices são também vértices dos triângulos equiláteros.

20. (Putnam 05) Sendo m, n inteiros positivos, seja $f(m, n)$ a quantidade de n-uplas de inteiros $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $|x_1| + \cdots + |x_n| \le m$. Prove que $f(m, n) = f(n, m)$.

21. (IMOSL 02) Seja n um inteiro positivo. Uma sequência de n inteiros positivos (não necessariamente distintos) é dita *cheia* se satisfaz a seguinte condição: para cada inteiro positivo $k \ge 2$, se o número k aparece na sequência, o número $k - 1$ também aparece e, além disso, a primeira aparição de $k - 1$ acontece antes da última aparição de k. Para cada n, determine a quantidade de sequências cheias de n elementos.

22. (Cone Sul 04) Seja n um inteiro positivo. Seja C_n a quantidade de inteiros positivos x, menores que 10^n, tais que a soma dos algarismos de $2x$ é menor que a soma dos algarismos de x. Prove que $C_n \ge \dfrac{4(10^n - 1)}{9}$.

23. (Putnam 96) Dada uma sequência finita S de símbolos X e O, definimos $\Delta(S) = n(X) - n(O)$, onde $n(X)$ e $n(O)$ representam, respectivamente, a quantidade de símbolos X's e O's na sequência S. Por exemplo, $\Delta(XOOXOOX) = 3 - 4 = -1$. Uma sequência S é dita *balanceada* se para toda subsequência T de símbolos consecutivos de S, $-2 \le \Delta(T) \le 2$. Determine o número de sequências balanceadas de tamanho n.

24. (IMO 08 - P5) Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \ge n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\frac{N}{M}$.

25. (IMO 95 - P6) Seja p um primo ímpar. Encontre o número de subconjuntos A, com p elementos, do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tais que a soma dos elementos de A é divisível por p.

26. (IMO 97 - P6) Para cada inteiro positivo n, seja $f(n)$ o número de partições de n em potências de 2. Prove que, para todo $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} \leq f(2^n) \leq 2^{n^2/2}.$$