Desigualdades: o básico e alguns elementos

Professor Emiliano Augusto Chagas

Desigualdades é um assunto que, assim como muitos tópicos em olimpíada, possui uma quantidade grande de conteúdo e de técnicas. Para se ter uma ideia, entre as desigualdades que um aluno postulante à IMO deve dominar temos: Aritmética-Geométrica-Harmônica, Cauchy-Schwartz, Chebychev, Rearranjo, Bernoulli, Jensen, e por ai vai. De nada vai adiantar "ter uma noção" sobre todas essas desigualdades se o básico não for dominado.
O básico tratado aqui será: transformações irreversíveis, estimativas, formulas algébricas, completar quadrados, alguns máximos e mínimos e finalmente desigualdade entre as médias.

Para esquentar!

01) $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$, para a > 1.

02) $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, para a, b > 0

03) $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$, para todo x real.

04) Seja $R = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$, para a, b, c e d > 0. Mostre que $1 < R < 2$

05) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$, para n > 2

06) Seja $Q(n) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}$, para n > 1. Mostre que $\frac{1}{2\sqrt{n}} < Q(n) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

07) $x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 41 \geq 0$

Desigualdade das Médias, Alguns Máximos e Mínimos

Sejam: $QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $AM = \frac{a+b}{2}$, $GM = \sqrt{ab}$ e $HM = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, temos:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

A igualdade ocorre se, e somente se, *a* = *b*.

O resultado segue para mais variáveis, para três variáveis definimos:

$$QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},\ AM = \frac{a+b+c}{3},\ GM = \sqrt[3]{abc} \text{ e } HM = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, *a* = *b* = *c*.

Algumas consequências dessas desigualdades são máximos e mínimos. Para a, b > 0:

Na soma temos $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, que nos leva a $x+\frac{1}{x} \geq 2$. Olhando o produto temos $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

08) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Para a, b > 0

09) Se $x^3+y^3=2$, então $x+y \leq 2$

10) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

11) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z)$

12) $a+b+c \leq \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}$

13) Ache o menor valor de $V=\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}$

14) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. Para a, b, c > 0

15) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ para a, b > 0 e *a.b* = 1

16) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ para a, b e c > 0

17) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$ para a, b > 0 e *a + b* = 1

18) Para 0 < b < a, $a+\frac{1}{ab-b^2} \geq 3$

19) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$ para a, b, c > 0.

20) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$ para a, b, c > 0.

21) $\frac{a^4+9}{10} > \frac{4}{5}$ para a > 0.

22) (Suiça 1983) Sejam a, b e c > 0. Prove que $abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

23) (IMO 2000) Sejam a, b e c > 0 tais que a.b.c = 1. Prove que $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$

24) (Grã Bretanha 2005) Sejam a, b e c > 0. Prove que $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

25) (Balkan 2001) Seja $a+b+c \geq abc$. Prove que $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc$

26) (Rússia 2002) Sejam x, y e z > 0 e x + y + z = 3. Prove que $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx$

27) (Japão 2005) Sejam a, b e c > 0 e a + b + c = 1. Prove que $a.\sqrt[3]{1+b-c}+b.\sqrt[3]{1+c-a}+c.\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$

28) (Canadá 2008) Sejam a, b e c > 0 e a + b + c = 1. Prove que $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$

29) (Peru 2007) Sejam a, b e c > 0 e $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Prove que $a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$.

Dicas:

03) Colocar todos os termos na esquerda. Há um fator (x - 1). Testar os casos x < 1, - 1 < x < 1 e x > 1.

05) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ para n > 2

06) $Q(n) < \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{2n}{2n+1}$ e $2Q(n) > \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{2n-2}{2n-1}$

07) $(x-y-6)^2$

09) $x=1+u$ e $y=1+v$

13) Calcule V^2

17) $AB \le \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$. Faça A = a - b e B = b

18) $(b+c)(d+a) \le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$ e $(c+d)(a+b) \le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$

20) Quebre na soma de quatro termos e utilize desigualdade das médias.