1. Desmata-mata e Sinais

1.1. **REGRA NORMAL.** Lembre-se que toda a nossa análise é baseada na importantíssima **regra normal**: quem não tem movimento válido, perdeu.

1.2. **SINAL DE UM JOGO G.** Supondo que ambos os jogadores L (você) e R (eu) sempre joguem da melhor maneira possível, definimos o sinal de um jogo G por[1]:

$$G = 0 \iff \text{Quem começa, perde}$$
$$G > 0 \iff L \text{ ganha}$$
$$G < 0 \iff R \text{ ganha}$$

1.3. **NEGATIVO DE UM JOGO G.** É o jogo $(-G)$ obtido trocando os papéis dos dois jogadores.

1.4. **SOMA DE DOIS DESMATA-MATAS.** Dadas duas figuras de desmata-mata, sua soma é simplesmente o jogo que as coloca lado a lado como posição inicial[2]. Note que, pelo argumento de simetria que usamos em sala, temos nosso primeiro teoreminha:

$$G + (-G) = 0$$

(A estratégia é simples: sempre que o primeiro jogador fizer algo numa componente do jogo, o segundo repete o movimento na outra componente. Quando o primeiro jogador terminar uma componente, o segundo terminará a outra logo em seguida e vencerá. Em suma, o segundo ganha, isto é, **quem começa perde**.)

1.5. **NOTAÇÃO.** Nesta lista, um "tronco" de desmata-mata será representado por uma sucessão de L's e R's, de acordo com as cores das varetas (azuL e veRmelho), **de baixo para cima**. Por exemplo, o tronco que tem uma vareta veRmelha sobre uma vareta azuL será descrito como LR. Em sala, vimos que $LR + LR + R$ tem valor 0, e portanto (como $R = -1$) é razoável dizer que o valor de LR é $\frac{1}{2}$.

Exercício 1. *Como garantir o empate no jogo dos* 15 *descrito em sala?*

Exercício 2. *O objetivo deste problema é encontrar o valor de LRR.*
a) Explique como você sabe que $LRR > 0$.
b) Mostre que $LRR < \frac{1}{2}$ (isto é, mostre que $LRR - LR = LRR + RL < 0$).
c) Será que $LRR = \frac{1}{3}$? Descubra o sinal de $LRR + LRR + LRR - L = LRR + LRR + LRR + R$.
d) Será que $LRR = \frac{1}{4}$? Descubra o sinal de $LRR + LRR - LR = LRR + LRR + RL$.

Exercício 3. *Mostre que $L + L + L + L - LLLL = 0$, mas que $L + L + L + R - LLLR < 0$. Qual o valor de $LLLR$?*

Exercício 4. *Determine o sinal de $LRRR + LRR + LR + R$.*

Exercício 5. *Determine o sinal de $LRR + LR + LR + R$.*

Exercício 6. *Use indução finita para mostrar que $LR^n + LR^n - LR^{n-1} = 0$ (onde $R^n = RRR...R$, com n R´s). Assim, é razoável escrever $LR^n = \frac{1}{2^n}$.*

---

[1] Sim, está faltando aqui um sinal. Se quem começa ganha, dizemos que $G \parallel 0$ (lê-se: G é confuso com 0). Jogos confusos com zero aparecerão mais tarde na teoria.

[2] Generalização: coloque n jogos G_1, G_2, ..., G_n numa mesa. Na sua vez, cada jogador escolhe UM dos n jogos e faz UM lance válido no jogo que escolheu (de acordo com as regras daquele jogo). O jogo assim criado é a SOMA $G = G_1 + ... + G_n$. É fácil ver que esta soma é comutativa e associativa!

2. Desmata-mata e Números

2.1. JOGOS DIÁDICOS. Definimos:

$$\begin{aligned} 0 &= \{|\}\,;\ 1 = \{0|\}\,;\ 2 = \{1|\}\,; ...n+1 = \{n|\}\,; ...; -1 = \{|0\}\,;\ -2 = \{|-1\}\,;\ -3 = \{|-2\}\,;\ ... \\ \frac{1}{2} &= \{0|1\}\,;\ \frac{3}{2} = \{1|2\}\,; ...; \frac{1}{4} = \left\{0|\frac{1}{2}\right\}; \frac{3}{4} = \left\{\frac{1}{2}|1\right\}; .. \end{aligned}$$

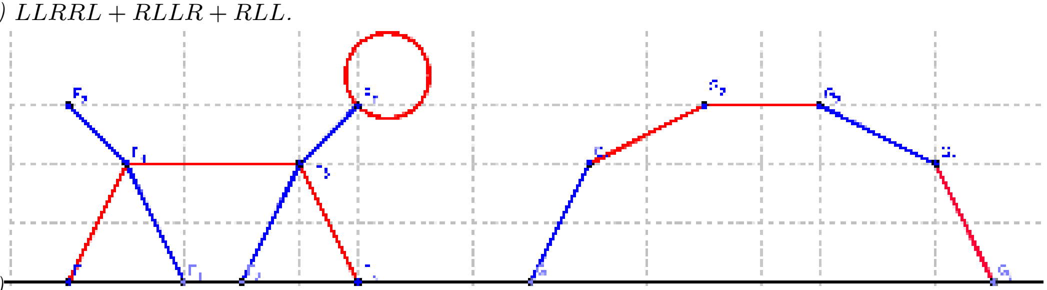
ou seja, em geral

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{2p}{2^{n+1}}|\frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\} = \left\{\frac{p}{2^n}|\frac{p+1}{2^n}\right\}$$

2.2. CALCULANDO TRONCOS. Hastes da mesma cor conectadas ao solo valem um número inteiro. A partir daí, cada haste vale metade da anterior (positivo se azul, negativo se vermelho);

2.3. A REGRA DA SIMPLICIDADE. Suponha que $a < b$ são jogos que correspondem a números reais. Então $\{a|b\}$ é o número mais "simples" que satisfaz $a < x < b$.

Exercício 7. *Determine o valor dos jogos e o melhor lance de cada jogador:*
a) $LLRRL + RLLR + RLL$.



b)

Exercício 8. *Seja x o jogo dado pelo tronco $LRRL$,* ***modificado de forma que a ponta superior também seja conectada ao solo****. Vamos calcular x sem usar explicitamente a Regra da Simplicidade:*
a) Escreva x na forma $\{a|b\}$. Olhando apenas para a e b, você sabe que $x > 0$ – por quê?
b) Agora escreva $x - 1$ na forma $\{a|b, x\}$. Explique como você sabe que $x - 1 = 0$ olhando apenas para a, b e x.

Exercício 9. *Suponha que $1 < a < 2 < 6 < b$. Vamos mostrar que $\{a|b\} = 2$.*
a) Explique como você sabe que $x = \{a|b\} > 0$.
b) Finja que $x = \{a|b\}$ é um jogo de Hackenbush desconhecido, e coloque uma vareta vermelha ao seu lado. Escreva $x - 1 = \left\{G^L|G^R\right\}$ onde G^L e G^R são conjuntos de números, e explique porque $x - 1 > 0$.
c) Agora considere $x - 2$ escreva-o na forma $\left\{G^L|G^R\right\}$ e mostre que $x - 2 = 0$.

Exercício 10. *O jogo de Cutcake pode ser descrito assim: numa mesa, há vários pares ordenados de inteiros positivos (isto é, bolos retangulares, representados na forma $[x \times y]$). Na sua vez L escolhe um dos pares $[x_i \times y_i]$ presentes com $y_i \geq 2$ e o troca por $[x_i \times c_i]$ e $[x_i \times d_i]$ onde c_i e d_i são inteiros positivos com $c_i + d_i = y_i$ (isto é, L faz um corte vertical no bolo, trocando-o por dois menores). Analogamente, na sua vez, R pode escolher* ***um*** *dos pares $[x_i \times y_i]$ com $x_i \geq 2$ e dividi-lo em dois pares $[a_i \times y_i]$ e $[b_i \times y_i]$ onde $a_i, b_i \geq 1$ e $a_i + b_i = x_i$. Assim:*

$$\begin{aligned} [1 \times 1] &= \{|\} = 0 \\ [1 \times 2] &= \{[1 \times 1] + [1 \times 1]\,|\} = \{0|\} = 1 \\ [2 \times 2] &= \{[2 \times 1] + [2 \times 1]\,|\,[1 \times 2] + [1 \times 2]\} = \{-2|2\} = 0 \end{aligned}$$

Monte uma tabela com os valores dos bolos $[x_i \times y_i]$ para $0 \leq x_i, y_i \leq 15$. Você vê algum padrão nos valores encontrados?

3. Nim e Nímeros (Finitos)

Os nímeros finitos são definidos por

$$\begin{aligned} 0 &= \{|\} \\ *1 &= * = \{0|0\} \\ *2 &= \{0,* \mid 0,*\} \\ &\ldots \\ *n &= \{0,*,...,*(n-1) \mid 0,*,...,*(n-1)\} \end{aligned}$$

3.1. **PRINCÍPIO DO MENOR EXCLUÍDO.** Seja $S = \{x_i\}$ um conjunto de números naturais. Então

$$\{*x_1, *x_2, ..., *x_n \mid *x_1, *x_2, ..., *x_n\} = *x$$

onde x é o menor natural que não está presente no conjunto S. Portanto:

Teorema 1 (Sprague-Grundy)**.** *Todo jogo imparcial é um nímero*[3]*.*

3.2. **SOMANDO NÍMEROS.**

- Qualquer nímero $*n$ satisfaz $*n + *n = 0$
- Se x_1, x_2, ..., x_n são potências de 2 **distintas**, então

$$*x_1 + *x_2 + ... + *x_n = *(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

Exercício 11. *Por que vale* $*n + *n = 0$*?*

Exercício 12. *Explique porque* $m \neq n \Rightarrow *m \neq *n$*.*

Exercício 13. *Explique explicitamente porque o princípio do Menor Excluído vale para o jogo*

$$G = \{0, *, *2, *5, *7 \mid 0, *, *2, *5, *7\}$$

Exercício 14. *Mostre que* $-\frac{1}{2^n} < * < \frac{1}{2^n}$ *para todo* n *natural.*

Exercício 15. *Quem vence um jogo de Nim com* 5 *pilhas de tamanhos* 1, 3, 5, 6 *e* 7*? Quais os movimentos vencedores?*

[3]Tecnicamente, o teorema vale para jogos com infinitas opções, desde que criemos nímeros como $*\omega = \{*\mathbb{N} \mid *\mathbb{N}\}$ e outros mais "transfinitos".

4. Definições e Teoria Formais

4.1. NOVA DEFINIÇÃO FORMAL DE "JOGO".

- Um jogo G é um par ordenado $\left\{G^L|G^R\right\}$ onde G^L e G^R são **conjuntos** de jogos "previamente definidos".
- Os elementos de $G^L \cup G^R$ são as **opções** de G. Se $H \in G^L$, escreveremos $G \xrightarrow{L} H$ (em um lance, *Left* leva G para H). Se $H \in G^R$, escreveremos $G \xrightarrow{R} H$.
- **Condição Descendente:** não pode haver cadeia infinita $G \xrightarrow{?} G_1 \xrightarrow{?} G_2 \xrightarrow{?} G_3 ...$

4.2. ALGUNS JOGOS (ORDENADOS POR GERAÇÃO).

$\{\|\} \equiv 0$				
$\{0\|\} \equiv 1$	$\{\|0\} \equiv -1$		$\{0\|0\} \equiv *$	
$\{1\|\} \equiv 2$	$\{\|-1\} \equiv -2$	$\{0\|1\} \equiv \frac{1}{2}$	$\{0,*\|0,*\} \equiv *2$	$\{0\|*\} \equiv \uparrow$ $\{*\|0\} \equiv \downarrow$
$\{n\|\} \equiv n+1$	$\{\|-n\} \equiv -n-1$		$\{0,*,*2,...,*n\|0,*,*2,...,*n\} \equiv *(n+1)$	

4.3. NEGATIVO E SOMA. Temos as seguintes definições recursivas

$$\begin{aligned} -G &\equiv \left\{-G^R | -G^L\right\} \\ G+H &\equiv \left\{G^L+H, G+H^L \mid G^R+H, G+H^R\right\} \\ G-H &\equiv G+(-H) \end{aligned}$$

onde as operações envolvendo conjuntos são feitas para **cada** elemento dos conjuntos citados.

4.4. SINAIS E EQUIVALÊNCIAS. É conveniente defini-los recursivamente, aos pares

$$\begin{array}{lcll} G \geq 0 & : & \textbf{não há } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } R \text{ começa, então } L \text{ ganha} \\ G \leq 0 & : & \textbf{não há } G^L \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } L \text{ começa, então } R \text{ ganha} \end{array}$$

Portanto, as negações são

$$\begin{array}{lcll} G \lhd 0 & : & \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } R \text{ começa, então } R \text{ ganha} \\ G \rhd 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } L \text{ começa, então } L \text{ ganha} \end{array}$$

Daqui tiramos cada um dos 4 sinais via interseções:

$$\begin{array}{lcll} G > 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{não há } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad L \text{ ganha} \\ G < 0 & : & \textbf{não há } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad R \text{ ganha} \\ G = 0 & : & \textbf{não há } G^L \leq 0 \text{ e } \textbf{não há } G^R \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Quem começa perde} \\ G \parallel 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Quem começa ganha} \end{array}$$

Enfim, definimos

$$\begin{array}{ll} G > H \iff G-H > 0 & G < H \iff G-H < 0 \\ G = H \iff G-H = 0 & G \parallel H \iff G-H \parallel 0 \end{array}$$

Usaremos $G \equiv H$ para dois jogos **idênticos**, e $G = H$ para esta última igualdade.

5. Roteiro da Teoria

Exercício 16. *Mostre que* $n+1$ *(soma de jogos) é, de fato,* $n+1$ *(soma de números).*

Exercício 17. *Mostre que* $* \parallel 0$, *e que* $*+* \equiv \{*|*\} = 0$.

Exercício 18. *Mostre que a adição é comutativa, associativa e tem* $\{|\}$ *como elemento neutro.*

Exercício 19. *Mostre que* $-(-G) \equiv G$.

Exercício 20. *Mostre que* $-(G+H) \equiv (-G)+(-H)$.

Exercício 21. *Mostre que, se* $H \in G^L$, *então* $H \lhd G$. *Analogamente, se* $H \in G^R$, *então* $G \lhd H$. *Em suma, abusando a notação,* $G^L \lhd G \lhd G^R$. *Conclua que* $G - G = 0$.

Exercício 22. *Mostre (pela definição formal ou pela interpretação por jogos) que* $G \geq 0$ *e* $H \geq 0 \Rightarrow G+H \geq 0$.

Exercício 23. *Mostre (pela definição formal ou pela interpretação por jogos) que* $G \geq 0$ *e* $H \rhd 0 \Rightarrow G+H \rhd 0$.

Exercício 24. *Mostre que se* $G = 0$ *então* $G+H$ *tem o mesmo sinal de* H. *Conclua que jogos iguais têm o mesmo sinal, e que* $G > H \Rightarrow G+K > H+K$.

Exercício 25. *Mostre que* $G \geq H \geq K \Rightarrow G \geq K$.

Exercício 26. *Mostre que a igualdade é, de fato, uma relação de equivalência.*

Exercício 27. *Mostre que a adição e a simetria são compatíveis com a igualdade, isto é*
a) $G_1 = G_2$ *e* $H_1 = H_2 \Rightarrow G_1 + H_1 = G_2 + H_2$
b) $G_1 = G_2 \Rightarrow -G_1 = -G_2$.

Exercício 28. *Mostre que* $\{...|...\}$ *é compatível com a igualdade, isto é,* $L_1 = L_2$ *e* $R_1 = R_2 \Rightarrow \{L_1|R_1\} = \{L_2|R_2\}$.

Exercício 29. *Mostre via exemplos que* $G \rhd 0$ *e* $H \rhd 0$ *não implica nada sobre o sinal de* $G+H$*!*

6. Tabelas de Sinais; Jogos Subtrativos

6.1. **SINAIS E SOMAS.** A seguinte tabela dá o sinal de $G+H$ baseado nos sinais de G e H:

	$H=0$	$H>0$	$H<0$	$H \parallel 0$
$G=0$	$G+H=0$	$G+H>0$	$G+H<0$	$G+H \parallel 0$
$G>0$	$G+H>0$	$G+H>0$	??	$G+H \rhd 0$
$G<0$	$G+H<0$	??	$G+H<0$	$G+H \lhd 0$
$G \parallel 0$	$G+H \parallel 0$	$G+H \rhd 0$	$G+H \lhd 0$	??

Consequentemente, comparando G e H a um jogo K, temos:

	$K=H$	$K>H$	$K<H$	$K \parallel H$
$G=K$	$G=H$	$G>H$	$G<H$	$G \parallel H$
$G>K$	$G>H$	$G>H$	??	$G \rhd H$
$G<K$	$G<H$	??	$G<H$	$G \lhd H$
$G \parallel K$	$G \parallel H$	$G \rhd H$	$G \lhd H$	??

Em particular, note que

$$G \leq K \lhd H \Rightarrow G \lhd H$$

Exercício 30. *Dê exemplos de jogos $G \parallel 0$ e $H \parallel 0$ cuja soma seja (a) Zero; (b) Positiva; (c) Confusa com zero.*

Exercício 31. *Dê exemplo de jogos $G>0$ e $H<0$ tal que $G+H \parallel 0$.*

6.2. **JOGOS SUBTRATIVOS.** É um jogo de Nim onde o número de palitos retirados tem que estar num conjunto S pré-determinado. Neste caso, S é dito o *conjunto subtrativo* do jogo. Por exemplo, convença-se de que, se $S=\{1,2,3,4\}$, a seguinte tabela dá o valor niмérico $G(n)$ de uma pilha com n palitos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$G(n)$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	$*1$	...

Os valores niméricos de $G(n)$ (sem as estrelas), são resumidos na *sequência Nim* do conjunto S (costuma-se separar $G(0)$ dos outros valores por um ponto decimal). No exemplo acima, a sequência Nim de $S=\{1,2,3,4\}$ é 0.12340123401234....

Exercício 32. *Determine a sequência Nim dos conjuntos*
a) $S=\{4\}$
b) $S=\{3,4\}$
c) $S=\{2,3,4\}$
d) $S=\{1,4\}$
e) $S=\{2,5,7\}$
Você consegue determinar as "dizimas periódicas" dessas sequências?

Exercício 33. *Num Nim com conjunto subtrativo $S=\{1,4\}$, há quatro pilhas na mesa, de tamanhos 4, 5, 6 e 7. Há movimento vencedor? Qual(is)?*

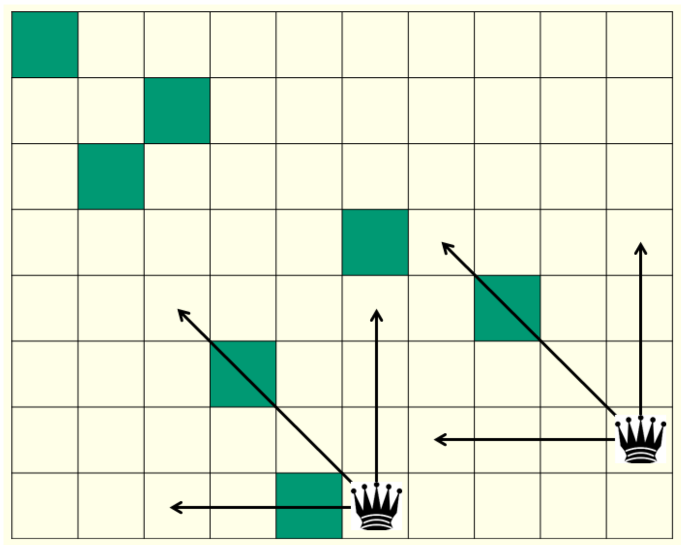
Exercício 34. *Demonstre: se S tem N elementos, sua sequência Nim jamais chega ao número $*(N+1)$.*

Exercício 35. *Demonstre: se S é finito, então sua sequência Nim é periódica (a partir de certo ponto).*

Exercício 36 (Pareamento de Ferguson)**.** *Num Nim com conjunto subtrativo S, mostre que $G(n)=0 \Leftrightarrow G(n+\alpha)=*1$, onde $\alpha=\min S$.*

6.3. OUTROS JOGOS IMPARCIAIS.

Exercício 37 (Wyt´s Queens). *a) Uma dama está na casa (a, b) de um tabuleiro 13×13 ($0 \leq a, b \leq 12$). Em cada turno, o jogador da vez move quantas casas quiser em uma das seguintes direções: Norte, Oeste ou Noroeste. Quem levar a dama ao canto Noroeste (que é a casa $(0, 0)$) vence. Construa uma tabela com o valor nimérico deste jogo em função de (a, b).*
b) Seja $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (a famosa razão áurea, que satisfaz $\tau^2 = \tau + 1$). Use uma calculadora para calcular a parte inteira (arredonde para baixo) de $(n\tau, n\tau^2)$ onde $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Você adivinharia, sem demonstrar, o que esta conta está fazendo neste problema?
c) Posicione 2 damas nas casas $(7, 5)$ e $(6, 9)$ como na figura abaixo. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das damas e a move como no jogo anterior. As damas não interferem uma com a outra, isto é, uma dama pode passar por cima da outra em seu movimento, ou ocupar a mesma casa que a outra. Quem não tiver movimento válido (o que ocorre quando todas as damas estiverem no canto Noroeste) perde. Qual o movimento vencedor?



Exercício 38 (Kayles). *Num jogo de Kayles, n pinos de boliche aparecem inicialmente enfileirados um ao lado do outro. A cada jogada, você pode usar sua bola de boliche para derrubar ou um pino qualquer, ou dois pinos adjacentes quaisquer (nota: se você derrubou o pino 2 entre os pinos 1 e 3, os pinos 1 e 3* ***não são*** *considerados adjacentes). Como usual, os dois jogadores alternam suas jogadas, e quem derrubar o útlimo pino ganha. Determine o valor nimérico da fila com n pinos, onde $0 \leq n \leq 23$. Se você tiver coragem ou capacidade computacional, continue a tabela até $n = 120$, escrevendo os nímeros de 12 em 12. Você vê um padrão de repetição?*

Exercício 39. *Num tabuleiro com n casas enfileiradas, dois jogadores se alternam: a cada lance, o jogador da vez escolhe uma casa vazia* ***que não seja adjacente a uma casa ocupada*** *e põe uma pedra ali. Como sempre, quem não tem movimento válido perde. Determine o valor nimérico $G(n)$ deste jogo para $0 \leq n \leq 10$.*