1 Eu conto com as bijeções!

A questão mais fundamental em Combinatória é determinar a quantidade de elementos em um conjunto finito. A tabela a seguir mostra alguns exemplos básicos:

objetos	**quantidade**
pares ordenados (a, b) com inteiros $1 \leq a \leq m$ e $1 \leq b \leq n$	$m \cdot n$
permutações de $a_1 a_2 \ldots a_n$ com a_i's dois a dois distintos	$n! \stackrel{\text{df}}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$	2^n
subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com k elementos	$\binom{n}{k} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

Para contar o número de elementos em outros conjuntos, uma das técnicas mais básicas é a construção de **bijeções** que permitam reduzir a contagem a um caso já conhecido (como os exemplos acima). Uma bijeção é uma função $f \colon A \to B$ tal que para todo elemento $b \in B$ exista **exatamente** um elemento $a \in A$ com $f(a) = b$. Assim, se existe uma bijeção entre A e B estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos.

2 Aquecimento

Exercício 2.1 Demonstre:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

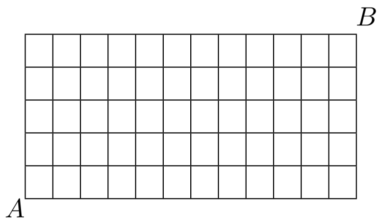
(c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

(d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = 0$

(e) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \binom{n}{3}\binom{m}{k-3} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$

(f) $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$

Exercício 2.2 No labirinto a seguir, de quantas maneiras um ornitorrinco pode ir do ponto A ao ponto B sem recuar? (i.e. o ornitorrinco só vai para cima ou para a direita)



Exercício 2.3 Determine o número de soluções inteiras a_i satisfazendo

(a) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$

(b) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$

(c) $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ com $a_i \geq 0$

(d) $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ com $a_i > 0$

Exercício 2.4 Determine a quantidade de
(a) subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ contendo pelo menos um número par.
(b) maneiras de arranjarmos n pessoas em círculo, se duas maneiras são consideradas a mesma se uma é uma rotação da outra.
(c) permutações $\pi \colon \{1, 2, \ldots, 6\} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ com $\pi(1) \neq 2$.
(d) maneiras de dividir 10 pessoas em 5 grupos de duas pessoas cada.
(e) anagramas da palavra MISSISSIPPI sem duas letras S consecutivas.

Exercício 2.5 O número de maneiras de particionar um conjunto com n elementos em k conjuntos dois a dois disjuntos e não vazios é denotado por $\left\{ n \atop k \right\}$, o chamado **número de Stirling de segunda espécie**. Mostre que

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

Exercício 2.6 Dispõe-se de colares de a cores distintas e queremos montar colares com n contas cada. Dois colares são considerados iguais se um é uma rotação do outro.
(a) Quantos colares com $n = 4$ contas de $a = 7$ cores podemos montar?
(b) Se n é primo, quantos colares com n contas de a cores podemos montar?

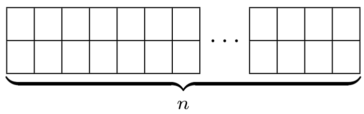
Exercício 2.7 Murali, o primeiro passageiro a embarcar em um avião com 100 lugares, perdeu seu cartão de embarque e por isso se sentou em um lugar aleatório. Em seguida, cada um dos passageiros restantes se sentou no seu lugar designado ou se este estava ocupado escolheu um assento livre aleatoriamente. Determine a probabilidade $P(k)$ de o k-ésimo passageiro se sentar em seu lugar designado.

3 Bijetando

Exercício 3.1 Determine o número de seqüências $(X_1, \ldots, X_k)$ de k subconjuntos $X_i \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que
(a) $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset$
(b) $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_k$

Exercício 3.2 Uma entrada de cinema custa 5 rands. Numa fila de $2n$ pessoas, há exatamente n pessoas com notas de 5 rands e as outras n possuem notas de 10 rands. Inicialmente o caixa do cinema está vazio. De quantas maneiras podemos organizar a fila de modo que o caixa sempre possa dar o troco?

Exercício 3.3 Determine o número de maneiras de distribuir os números de 1 a $2n$ na tabela $2 \times n$ a seguir de modo que os números em cada linha e coluna estejam em ordem crescente.



Exercício 3.4 De quantas maneiras podemos dividir um polígono regular de $n + 2$ lados em n triângulos utilizando suas diagonais?

Exercício 3.5 Mostre que o número de partições não ordenadas de n em no máximo k partes é igual ao
(a) número de partições não ordenadas de n em partes que não excedem k.
(b) número de partições não ordenadas de $n + k$ em exatamente k partes.

Exercício 3.6 Prove: o número de partições não ordenadas de n em partes distintas é igual ao número de partições não ordenadas de n em partes ímpares.

Exercício 3.7 As partições não ordenadas de 5 são

$$5, \qquad 4+1, \qquad 3+1+1, \qquad 3+2, \qquad 2+2+1, \qquad 2+1+1+1, \qquad 1+1+1+1+1$$

A quantidade de 1's nesta lista é 12. Agora, para cada partição, conte o número de símbolos distintos e some. O resultado é novamente 12. Prove isto no caso geral.