

CONTEÚDO

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA <i>Problemas e Soluções</i>	2
14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA <i>Prova</i>	13
ARTIGOS	
CONTAR DE DUAS MANEIRAS, PARA GENERALIZAR <i>José Paulo Q. Carneiro - Universidade Santa Úrsula</i>	15
A MATEMÁTICA DAS ABELHAS <i>José Cloves Saraiva - Universidade Federal de Maranhão</i>	18
O TEOREMA DE RAMSEY <i>Carlos Gustavo T. de A. Moreira - IMPA</i>	23
APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS À GEOMETRIA <i>Edmilson Motta - Colégio Etapa</i>	30
40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL E 14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA <i>Segundo teste de Seleção</i>	39
10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL <i>Primeiro teste de Seleção</i>	40
10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL <i>Segundo teste de Seleção</i>	41
SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS	42
PROBLEMAS PROPOSTOS	57
ASSINATURA DA REVISTA EUREKA! 2000	59
FICHA DE CADASTRAMENTO ASSINATURA DA REVISTA EUREKA!	60
COORDENADORES REGIONAIS	61

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Problemas e Soluções

Primeiro Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

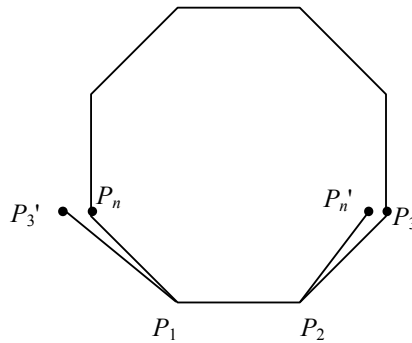
PROBLEMA 1

Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:

Para quaisquer dois pontos distintos A e B de S , a mediatriz do segmento AB é um eixo de simetria de S .

Solução de Fabrício Siqueira Benevides (Fortaleza - CE):

Seja α o fecho convexo dos pontos de S , isto é conjunto de pontos da periferia de S que formam um polígono convexo que contém todos os pontos de S . Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os vértices do polígono formado pelo fecho convexo.



Afirmção 1) P_3 é o simétrico de P_n em relação à mediatriz de $\overline{P_1P_2}$ que denotaremos por $md(\overline{P_1P_2})$.

Prova: Suponha o contrário. Seja P_n' o simétrico de P_n a $md(\overline{P_1P_2})$. P_n' deve estar no interior do polígono P_1, P_2, \dots, P_n , pois este é o fecho convexo.

Daí, $P_1 \hat{P}_2 P_n' < P_1 \hat{P}_2 P_3$, e se P_3' é o simétrico de P_3 à $md(\overline{P_1 P_2})$ teremos $P_1 \hat{P}_2 P_3' > P_2 \hat{P}_1 P_n$ (pela simetria), aí P_3' pertenceria a S e estaria fora do fecho convexo. Absurdo. Se P_n' está sobre o segmento $P_2 P_3$, teremos $P_n \hat{P}_1 P_2 = P_1 \hat{P}_2 P_3 \Rightarrow P_3' \in \overleftrightarrow{P_1 P_n}$ e $\overline{P_1 P_3'} > \overline{P_1 P_n} \Rightarrow P_3'$ está fora do fecho convexo (Absurdo).

Se P_n' está sobre o prolongamento de $P_2 P_3$, já temos um absurdo pois P_n' estaria fora do fecho convexo.

Logo, P_3 é realmente o simétrico de P_n .

Assim P_3 é o simétrico de P_n em relação à $md(\overline{P_1 P_2})$, donde $\overline{P_1 P_n} = \overline{P_2 P_3}$ (e $P_n \hat{P}_1 P_2 = P_1 \hat{P}_2 P_3$).

Analogamente, se olharmos para a mediatriz de $\overline{P_2 P_3}$ concluímos que

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_3 P_4} \quad (\text{e } P_1 \hat{P}_2 P_3 = P_2 \hat{P}_3 P_4).$$

Se continuarmos a olhar para as mediatrizes de $P_i P_{i+1}, i=1, \dots, n-1$, é fácil concluir que: todos os ângulos internos de P_1, P_2, \dots, P_n são iguais e:

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_3 P_4} = \overline{P_5 P_6} = \dots = \overline{P_{2k+1} P_{2(k+1)}} \quad \text{e} \quad \overline{P_2 P_3} = \overline{P_4 P_5} = \overline{P_6 P_7} = \dots = \overline{P_{2q} P_{2q+1}}$$

(ver índices módulo n .)

Temos agora 2 casos:

i) n é ímpar $n = 2k + 1$, teremos:

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_3 P_4} = \dots = \overline{P_{2k+1} P_1} = \overline{P_2 P_3} = \overline{P_4 P_5} = \dots = \overline{P_{2k} P_{2k+1}}; \quad \text{ou} \quad \text{seja} \quad \text{o fecho convexo é um polígono regular}$$

ii) n é par: $n = 2k$.

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_3 P_4} = \overline{P_{2k+1} P_{2k}} \quad \text{e} \quad \overline{P_2 P_3} = \overline{P_4 P_5} \dots = \overline{P_{2k-2} P_{2k-1}}$$

mas $md(P_1 P_3)$ também é eixo de simetria e é fácil ver que o simétrico de P_2 está sobre a mediatriz de $\overline{P_1 P_3}$ (e seu simétrico será ele mesmo).

Nesse caso $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, donde novamente o fecho convexo forma um polígono regular.

Portanto, o fecho convexo é um polígono regular.

Para finalizar, provaremos que não pode haver qualquer ponto em S além de P_1, P_2, \dots, P_n .

Já vimos que $P_1P_2\dots P_n$ é regular. Seja O o centro da circunferência circunscrita a $P_1P_2\dots P_n$. (pode ser $O \in S$ ou $O \notin S$). Seja P um ponto de S diferente de $P_1\dots P_n$. (P esta sobre algum lado ou no interior de $P_1\dots P_n$).

Seja P_i o vértice do nosso polígono cuja distância a P seja mínima. E seja $r = md(\overline{PP_i})$. É claro que r não passa por O , (que é o centro de simetria de $P_1\dots P_n$), assim se d_1 é a maior distância de um vértice P_j que está no semi-plano esquerdo de r a r ; e d_2 é a maior distância de um vértice P_k que está no semi-plano direito de r a r ; então $d_1 \neq d_2$. Suponha $d_1 > d_2$. Então o simétrico de P_j deveria pertencer a S mas está fora do fecho convexo. Absurdo.

Na verdade, quero dizer que se r não é um eixo de simetria de $P_1\dots P_n$, tomamos P'_1, \dots, P'_n os simétricos de P_1, \dots, P_n em relação a r , um dos P'_i estará fora do polígono $P_1\dots P_n$.

Conclusão:

Um conjunto finito de pontos S satisfaz o problema somente se e só se é o conjunto dos vértices de um dado polígono regular.

PROBLEMA 2

Seja $n \geq 2$ um inteiro fixo.

a) Determinar a menor constante C para a qual a desigualdade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

é válida para quaisquer números reais $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

b) Para esta constante C , determine quando ocorre a igualdade.

Solução:

Consideremos inicialmente o caso $n = 2$. Queremos achar a menor constante C tal que $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \leq C (x_1 + x_2)^4$ para quaisquer $x_1, x_2 \geq 0$.

Para $x_1 = x_2 = 1$ temos $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{8} (x_1 + x_2)^4$, donde necessariamente $C \geq \frac{1}{8}$. Vamos mostrar que $C = \frac{1}{8}$. Para isso, basta mostrar que

$$x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{1}{8} (x_1 + x_2)^4 \text{ para } x_1, x_2 \geq 0.$$

Como $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4$, isso equivale a mostrar que $x_1^4 + x_2^4 + 6x_1^2 x_2^2 \geq 4x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)$, mas isso segue diretamente de $(x_1 - x_2)^4 \geq 0$. Para $n > 2$ temos ainda $C \geq \frac{1}{8}$, pois fazendo $x_1 = x_2 = 1$ e $x_k = 0$ para $k \geq 3$ vale a igualdade com $C = \frac{1}{8}$.

Mostraremos que ainda vale a desigualdade do enunciado para $C = \frac{1}{8}$. Para isso, mostraremos o seguinte:

Lema: Se $x_1, \dots, x_n \geq 0$ e o número de termos $x_i > 0$ com $1 \leq i \leq n$ é $m \geq 3$ então podemos substituir x_1, \dots, x_n por $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ tais que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} \tilde{x}_i, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) < \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{x}_i \tilde{x}_j (\tilde{x}_i^2 + \tilde{x}_j^2) \text{ e o número de termos } \tilde{x}_i > 0 \text{ com } 1 \leq i \leq n \text{ é } m - 1.$$

Prova do Lema: Sejam x_r e $x_s, r \neq s$ os dois menores termos não nulos dentre x_1, x_2, \dots, x_n . Definimos $\tilde{x}_r = x_r + x_s, \tilde{x}_s = 0$ e $\tilde{x}_k = x_k$ para $k \notin \{r, s\}$.

Obviamente temos $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} \tilde{x}_i$ e há $m - 1$ termos $\tilde{x}_i = 0$. Note agora que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) = y_r y_s (y_r^2 + y_s^2) + (y_r^3 + y_s^3) \sum_{k \notin \{r, s\}} y_k + (y_r + y_s) \sum_{k \notin \{r, s\}} y_k^3,$$

donde

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{x}_i \tilde{x}_j (\tilde{x}_i^2 + \tilde{x}_j^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = -x_r x_s (x_r^2 + x_s^2) + ((x_r + x_s)^3 - (x_r^3 + x_s^3)) \sum_{k \notin \{r,s\}} x_k =$$

$$= x_r x_s (3(x_r + x_s) \sum_{k \notin \{r,s\}} x_k - (x_r^2 + x_s^2)), \text{ mas como } x_r \text{ e } x_s \text{ são os dois menores}$$

termos não nulos dentre os x_i (e há pelo menos 3), temos

$$\sum_{k \notin \{r,s\}} x_k \geq \frac{x_r + x_s}{2} \Rightarrow 3(x_r + x_s) \sum_{k \notin \{r,s\}} x_k \geq \frac{3}{2}(x_r + x_s)^2 > x_r^2 + x_s^2.$$

Para concluir observamos que:

i) Se no máximo um termo dentre os x_i é não nulo então $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = 0$, e vale a igualdade se e só se todos os termos são nulos.

ii) Se exatamente dois termos, digamos x_r e x_s , são não nulos, caímos no caso $n = 2$, ou seja, temos $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$, valendo a igualdade se e só se $x_r = x_s$.

iii) Finalmente, se há m termos não nulos com $m \geq 3$, aplicamos o lema $m - 2$ vezes e obtemos x_1', \dots, x_n' onde exatamente dois dos x_i' são não nulos e vale

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i' x_j' (x_i'^2 + x_j'^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i' \right)^4 = \frac{1}{8} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4, \text{ onde}$$

a segunda desigualdade segue de ii).

Assim, temos sempre $C = \frac{1}{8}$, ocorrendo a igualdade se e só se há exatamente dois termos x_r e x_s não nulos e $x_r = x_s$.

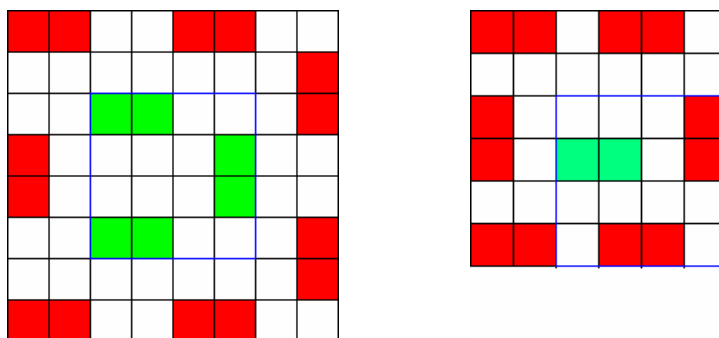
PROBLEMA 3

Considere um tabuleiro quadrado $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par fixo. O tabuleiro está dividido em n^2 quadrados unitários. Dizemos que dois quadrados distintos do tabuleiro são *adjacentes* se eles têm um lado comum.

Marcam-se N quadrados unitários do tabuleiro de tal forma que qualquer quadrado (marcado ou não) é adjacente a pelo menos um quadrado marcado.
 Determine o menor valor possível para N .

Adaptação da solução de Humberto Silva Naves (Goiânia - GO):

Vamos criar um algoritmo para preencher estes quadrados $n \times n$.
 Quando pintarmos um dos quadradinhos temos que pintar pelo menos outro quadradinho adjacente.



Procedemos da seguinte maneira:

Pintamos os dois quadradinhos do canto superior esquerdo (1,1) e (1,2).
 "Caminhamos" no sentido horário no bordo do quadrado, de modo que pintamos 2 quadradinhos e pulamos outros 2. Isso é possível pois o número de quadradinhos no bordo é múltiplo de quatro. Agora formamos outro quadrado menor de canto superior (3,3) e continuamos o mesmo procedimento para este quadrado, que também possui lado de medida par e assim sucessivamente.

O número de quadrados pintados vai ser:

$$N(n \times n) = 2n - 2 + N((n - 4) \times (n - 4))$$

Este algoritmo determina o menor N , pois cada quadradinho só possui um, e somente um "vizinho" pintado.

Essa construção mostra por indução que é possível marcar $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ quadrados e obter uma solução.

Para provar que esse número de quadrados marcados é o menor possível associamos a cada quadrado coordenadas (x, y) com $1 \leq x \leq n$ e $1 \leq y \leq n$. Se considerarmos os quadrados $\{(x, y) \mid (x \text{ e } y \text{ são ímpares e } x + y \equiv 2 \pmod{4}) \text{ ou } (x \text{ é ímpar, } y \text{ é par e } x + y \equiv n + 1 \pmod{4})\}$ verificamos que nenhuma peça é adjacente a mais de um dos quadrados deste conjunto. Como este conjunto tem $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ elementos, necessitamos no mínimo esta quantidade de peças \square

Segundo Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que

- p é primo,
- $n \leq 2p$, e
- $(p - 1)^n + 1$ é divisível por n^{p-1} .

Solução de Humberto Silva Naves (Goiânia - GO):

Analisando os casos:

$p = 2$: temos que as únicas soluções são para $n = 1$ e $n = 2$.

$p = 3$: temos que as únicas soluções são para $n = 1$ e $n = 3$.

$p > 3$: se $n < p - 1$, temos: (Caso trivial $n = 1 \Rightarrow p$ é divisível por 1).

n é ímpar, pois, $(p - 1)^n + 1$ é ímpar, logo n não pode ser par.

Lema:

Seja $a > b \geq 3$, então: $a^b < b^a$

Prova: Basta provar que: $b \cdot \ln a < a \cdot \ln b \Rightarrow \frac{b}{\ln b} < \frac{a}{\ln a}$, mas isto é obvio para a ,

$b \geq 3$, pois a função $t(x) = \frac{x}{\ln x}$ é crescente a partir de e . ($t'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \geq 0$ para

$x \geq e$.)

Afirmção: Se $p - 1 > n \geq 3$ (pois n é ímpar), então:

$(p - 1)^n < n^{p-1} \Rightarrow (p - 1)^n + 1 < n^{p-1}$ ou $(p - 1)^n + 1 < n^{p-1}$. Como

$(p-1)^n + 1 \neq n^{p-1}$ (pois $(p-1)^n + 1$ é múltiplo de p e n^{p-1} não é, temos $(p-1)^n + 1 < n^{p-1}$. Portanto n não pode ser menor que $p-1$.

Afirmção: Se $n > p$, então n não é primo:

Prova: se n for primo temos:

$$(p-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow [a^n \equiv a \pmod{n}]$$

$$(p-1) + 1 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{n} \text{ (um absurdo!).}$$

Logo, n é composto:

$n = a \cdot b$ (a é o menor fator primo de n). Então:

$$(p-1)^{ab} + 1 \equiv 0 \pmod{(ab)^{p-1}} \Rightarrow (p-1)^{ab} + 1 \equiv 0 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow (p-1)^{ab} \equiv -1 \pmod{a^{p-1}}$$

Seja K o menor natural tal que $(p-1)^K \equiv 1 \pmod{a^{p-1}}$.

Devemos ter $K \mid 2ab$ (pois $2ab = K \cdot q + r \Rightarrow (p-1)^r \equiv 1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow r = 0$).

Além disso devemos ter $K \mid \varphi(a^{p-1}) \Rightarrow K \mid a^{p-2}(a-1)$.

Então $K = 2^\alpha \cdot a^c$, onde $\alpha \in \{0, 1\}$ (pois se K tivesse um outro fator primo além do 2 que dividisse $(a-1)$, esse fator também teria que dividir $2ab$ que implica que esse fator dividiria ab , mas como o menor fator primo de $n = ab$ é o a , teríamos absurdo).

K é par, pois se não fosse teríamos $K \mid ab \Rightarrow (p-1)^{ab} \equiv 1 \equiv -1 \pmod{a^{p-1}}$, um absurdo pois é ímpar. Logo $K = 2 \cdot a^c$.

Temos

$$(p-1)^{2 \cdot a^c} \equiv 1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow ((p-1)^{a^c})^2 \equiv 1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow$$

$$(p-1)^{a^c} \equiv -1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow (p-1)^{a^c} \equiv -1 \pmod{a} \Rightarrow$$

$p-1 \equiv -1 \pmod{a}$, pois $b^a \equiv b \pmod{a} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{a}$, um absurdo pois $p \neq a$, porque $p < n < 2p$.

Logo não podemos ter $n > p$.

As únicas possibilidades que restam é $n = p-1$ ou $n = p$.

$n = p-1$ é falsa pois $p-1$ é par. Se $n = p$ temos: $(p-1)^p + 1 \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$ e como $p > 3$, temos:

$$[p^p + \binom{p}{1} p^{p-1} (-1)^1 + \dots + \binom{p}{3} p^3 \cdot (-1)^{p-3} + \binom{p}{2} p^2 \cdot (-1)^{p-2} + \binom{p}{1} p^1 (-1)^{p-1} + (-1)^p] +$$

$$+ 1 \equiv 0 \pmod{p^3} \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

(Um absurdo pois p^3 não divide p^2).

Logo as soluções são:

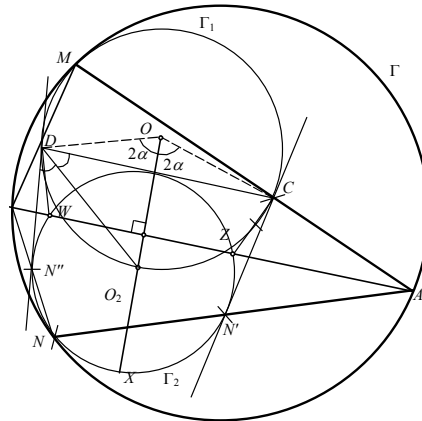
$$S = \{(1, 2); (2, 2); (1, 3); (3, 3)\} \cup \{(1, p) \mid p \text{ é primo}\} \square$$

PROBLEMA 5

Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 estão contidas no interior de uma circunferência Γ e são tangentes a Γ em pontos distintos M e N , respectivamente. A circunferência Γ_1 passa pelo centro de Γ_2 . A reta que passa pelos dois pontos de interseção de Γ_1 e Γ_2 intersecta Γ em A e B . As retas MA e MB intersectam Γ_1 respectivamente em C e D . Prove que CD é tangente a Γ_2 .

Solução de Pedro Paulo de Simoni Gouveia (Fortaleza - CE):

Considere a figura relativa ao problema:

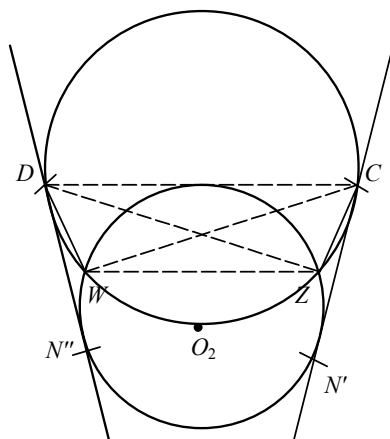


Sejam O e O_2 os centros de Γ_1 e Γ_2 respectivamente: Tome uma inversão $\varphi =$ inversão de centro em A e razão igual à potência do ponto A em relação a Γ_1 e Γ_2 (que é a mesma pois $A \in$ ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2). Assim $\varphi(M) = C$ e $\varphi(N) = N'$. Então a imagem de Γ pela inversão será uma reta passando por C e N' , como Γ é tangente à Γ_1 e $\Gamma_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{CN'}$ é tangente também à Γ_1 e Γ_2 .

Tome agora uma inversão ψ com centro em B e razão igual à potencia de B em relação à Γ_1 e Γ_2 ($B \in$ eixo radical).

$\psi(M) = D$ e $\psi(N) = N''$. Essa inversão leva Γ na reta $\overleftrightarrow{DN''}$ que será tangente comum à Γ_1 e Γ_2 .

Temos a seguinte situação.



Temos $DW = ZC$, e como $\widehat{DWC} = \widehat{DZC}$ que $DCZW$ é um trapézio isósceles $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp OO_2$.

Basta-nos provar agora que $\overline{O_2D}$ é bissetriz de $\widehat{N''DC}$ pois aí, O_2 será o incentro do triângulo formado por D, C e o encontro de $\overleftrightarrow{DN''}$ e $\overleftrightarrow{CN'}$.

Prova:

$$N''\widehat{D}O_2 = \alpha \Rightarrow D\widehat{O}_1O_2 = 2\alpha \Rightarrow C\widehat{O}_1O_2 = 2\alpha \Rightarrow C\widehat{D}O_2 = \alpha.$$

Logo $N''\widehat{O}_2 = C\widehat{D}O_2 = \alpha \Rightarrow DO_2$ é bissetriz $\Rightarrow \Gamma_2$ é o incírculo $\Rightarrow \Gamma_2$ é tangente a CD \square

PROBLEMA 6

Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução:

Fazendo $x = f(z)$, obtemos $f(f(z) - f(y)) = f(f(z)) + f(f(y)) + f(z)f(y) - 1$.

Fazendo $x = f(y)$, obtemos $f(0) = 2f(f(y)) + f(y)^2 - 1$, donde

$$f(f(y)) = \frac{1 + f(0) - f(y)^2}{2}. \text{ Portanto,}$$

$$f(f(z) - f(y)) = f(f(z)) + f(f(y)) + f(z)f(y) - 1 = \frac{1 + f(0) - f(z)^2}{2} + \frac{1 + f(0) - f(y)^2}{2} +$$

$+f(z)f(y)-1=f(0)-\frac{(f(z)-f(y))^2}{2}$. Provamos assim que $f(w)=f(0)-\frac{w^2}{2}$ sempre que w puder ser escrito como $f(z)-f(y)$. Vamos ver que qualquer $w \in \mathbb{R}$ pode ser escrito desta forma: $f(x-f(0))-f(x)=f(f(0))+xf(0)-1$. Se tivéssemos $f(0)=0$ o lado esquerdo seria sempre 0 e o lado direito seria igual a -1 , absurdo, portanto $f(0) \neq 0$ e $f(f(0))+xf(0)-1$ pode assumir qualquer valor real w (basta tomar $x=\frac{1+w-f(f(0))}{f(0)}$), mas então $w=f(z)-f(y)$ com $z=x-f(0)$ e $y=x$.

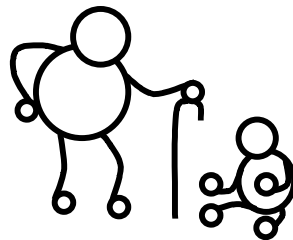
Mostramos assim que $f(w)=f(0)-\frac{w^2}{2}$ para todo $w \in \mathbb{R}$.

Em particular $f(f(y))=f(0)-f(y)^2/2$. Por outro lado

$f(f(y))=\frac{1+f(0)-f(y)^2}{2}$, donde $\frac{1+f(0)}{2}=f(0) \Rightarrow f(0)=1$, e $f(w)=1-\frac{w^2}{2}$ para todo $w \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que f satisfaz a condição do enunciado \square

Você sabia... que o livro "Problemas de las Olimpiadas Matemáticas del Cono Sur (I a IV)" já está a venda na Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática?

Informações:
Tel: 21-5295077
e-mail:obm@impa.br



14ª. OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

12 a 19 de setembro, La Havana, Cuba

O Resultado da equipe Brasileira

BRA1	Christian Iveson	PRATA
BRA2	Fabício Siqueira Benevides	BRONZE
BRA3	Fernando Paz Cardoso	PRATA
BRA4	Rui Lopes Viana Filho	OURO

Primeiro Dia

PROBLEMA 1:

Encontre todos os inteiros positivos que são menores que 1000 e cumprem a seguinte condição: o cubo da soma dos seus dígitos é igual ao quadrado do referido inteiro.

PROBLEMA 2:

Dadas duas circunferências M e N , dizemos que M bissecta N se a corda comum é um diâmetro de N .

Considere duas circunferências fixas C_1 e C_2 não-concêntricas.

- Prove que existem infinitas circunferências B tais que B bissecta C_1 e B bissecta C_2 .
- Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências B .

PROBLEMA 3:

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n n pontos distintos sobre uma reta do plano ($n \geq 2$).

Consideram-se as circunferências de diâmetro $\overline{P_i P_j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) e colorimos cada circunferência com uma cor escolhida entre k cores dadas. Chamamos (n, k) -nuvem a esta configuração.

Para cada inteiro positivo k , determine todos os n para os quais se verifica que qualquer (n, k) -nuvem contém duas circunferências tangentes exteriormente da mesma cor.

Nota: Para evitar ambiguidades, os pontos que pertencem a mais de uma circunferência não são coloridos.

Segundo Dia

PROBLEMA 4:

Seja B um inteiro maior que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demonstre que B tem fator primo maior ou igual a 11.

PROBLEMA 5:

Um triângulo acutângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O . As alturas do triângulo são AD , BE , e CF . A reta EF intersecta a circunferência em P e Q .

a) Prove que OA é perpendicular a PQ .

b) Se M é o ponto médio de BC , prove que $\overline{AP}^2 = 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OM}$.

PROBLEMA 6:

Sejam A e B pontos do plano e C um ponto da mediatriz de AB . Constrói-se uma sucessão $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, da seguinte maneira:

$C_1 = C$ e, para $n \geq 1$, se C_n não pertence ao segmento AB , C_{n+1} é o circuncentro do triângulo ABC_n .

Determine todos os pontos C tais que a sucessão $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ está definida para todo n e é periódica a partir de um certo ponto.

Nota: Uma sucessão $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ é periódica a partir de um certo ponto se existem inteiros positivos k e p tais que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

CONTAR DE DUAS MANEIRAS, PARA GENERALIZAR

José Paulo Q. Carneiro - Universidade Santa Úrsula

◆ Nível Intermediário

1. O seguinte problema é muito conhecido: quantas partidas há em um campeonato de futebol de um só turno com n times?

Uma maneira de raciocinar é: cada time vai jogar $n - 1$ partidas (com os outros $n - 1$ times). Portanto, o número de partidas parece ser $n(n - 1)$. Mas nessa contagem, cada partida foi contada duas vezes (por exemplo, o jogo Vasco \times Flamengo foi contado entre os jogos do Vasco e também entre os jogos do Flamengo). Logo, o número correto é: $\frac{n(n - 1)}{2}$.

Por outro lado, pode-se raciocinar também de outra maneira: O time T_1 vai jogar $n - 1$ partidas. Colocando essas partidas de fora, o time T_2 vai jogar $n - 2$ partidas contra os clubes restantes (agora já estamos evitando a repetição desde o início!). Além das que já jogou nessa enumeração, o time T_3 vai jogar $n - 3$ partidas, e assim por diante. Então o número total de partidas é: $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$.

Comparando as duas contagens, conclui-se que: $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$,

que é a célebre fórmula da soma dos $n - 1$ primeiros inteiros positivos. O interessante é que, ao resolver um problema de contagem por dois métodos diferentes, chegamos a uma fórmula de caráter geral.

Deve ser notado também que esta fórmula é básica para deduzir a fórmula geral da soma dos termos de uma progressão aritmética, pois:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (n - 1)r) &= na_1 + (1 + 2 + \dots + (n - 1))r = \\ &= na_1 + \frac{(n - 1)n}{2}r = \frac{n(a_1 + a_1 + (n - 1)r)}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \end{aligned}$$

2. Vamos agora pensar no número de partidas de um torneio usual de tênis, onde todos os jogos são eliminatórios. Observe primeiramente o torneio do fim para o início. A final é jogada pelos 2 vencedores das 2 semifinais (jogadas por 4 jogadores), que vieram de 4 quartas de final (jogadas por 8 jogadores), e assim por diante. De um modo geral, um torneio desse tipo começa com 2^n jogadores,

que jogam 2^{n-1} partidas entre si de forma eliminatória. Na fase seguinte, sobram 2^{n-1} jogadores, que jogam 2^{n-2} partidas, e assim sucessivamente, até a final. O número total de partidas é, portanto: $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$.

Vamos agora contar o número de partidas de outra forma. Cada partida tem um perdedor (não há empate em tênis). Por outro lado, como o torneio é eliminatório, todos os 2^n jogadores iniciais, exceto o vencedor final, perdem exatamente uma partida. Logo, o número total de partidas do torneio é $2^n - 1$.

Comparando os resultados, conclui-se que $1 + 2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

3. A última fórmula é um caso particular da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$.

Será que esta fórmula também pode ser deduzida por um raciocínio análogo aos anteriores? Para isto, imaginemos um torneio de tênis também eliminatório, mas com q^n jogadores iniciais (onde q é um natural > 1), e onde, a partir de um ranqueamento prévio, os jogadores são grupados em q^{n-1} grupos (ou “chaves”) de q jogadores. Dentro de cada grupo, os jogadores previamente ordenados J_1, \dots, J_q jogam entre si da seguinte forma: J_1 contra J_2 ; o vencedor desta partida joga contra J_3 ; e assim por diante, até J_q . Portanto, dentro de cada grupo, há $q - 1$ partidas, e como são q^{n-1} grupos, há, nesta primeira fase, $(q - 1)q^{n-1}$ partidas. De cada grupo sai um vencedor, e os q^{n-1} vencedores são novamente grupados em q^{n-2} grupos de q jogadores. O processo se repete, até que se atinge um único grupo de q jogadores, e desse grupo sai o vencedor do torneio.

O número total de partidas é $(q - 1)q^{n-1} + (q - 1)q^{n-2} + \dots + (q - 1)$. Por outro lado, por ser o torneio eliminatório, pelo mesmo princípio anterior, o número total de partidas é também igual ao número inicial de jogadores menos um, isto é: $q^n - 1$.

Comparando as duas contagens, conclui-se que:

$$(q - 1)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = q^n - 1, \text{ que é a fórmula procurada.}$$

Deve-se notar que esta dedução só vale para q natural > 1 . Mas a fórmula obtida serve também como uma sugestão para qualquer q real (ou complexo!). Para comprovar a sugestão, basta multiplicar os dois fatores do lado esquerdo e simplificar, obtendo o lado direito (ou observar que dois polinômios cujos valores coincidem em infinitos pontos são necessariamente iguais).

4. É curioso que se obtenham as fórmulas de soma dos termos de progressões aritméticas e geométricas através de contagens por dois métodos diferentes, porém mais importante talvez é o próprio método, que é muito fecundo e muito usado, por exemplo, em Análise Combinatória.

Só para dar um exemplo concreto, o símbolo $\binom{n}{k}$ representa o número de subconjuntos de k elementos que se pode extrair de um conjunto com n elementos (também se usa C_k^n), e pode ser calculado, como é conhecido, por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Suponha que se deseje calcular quantas comissões de p pessoas se podem formar a partir de um certo conjunto que consiste de n homens e n mulheres (supõe-se $p \leq n$). É claro que este número é igual a $\binom{2n}{p}$. Por outro lado, se contarmos

separadamente as comissões que são formadas por p homens, mais as que são formadas por $p-1$ homens e 1 mulher, mais as que são formadas por $p-2$ homens e 2 mulheres, etc., concluímos que este número também é igual a

$$\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p}\binom{n}{0}.$$

Daí se deduz, portanto, a interessante fórmula:

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p}.$$

Para dar um exemplo concreto, tomemos $n = 6$ e $p = 3$, obtendo:

$$\binom{6}{0}\binom{6}{3} + \binom{6}{1}\binom{6}{2} + \binom{6}{2}\binom{6}{1} + \binom{6}{3}\binom{6}{0} = 1 \times 20 + 6 \times 15 + 6 \times 15 + 1 \times 20 = 220 = \binom{12}{3}.$$

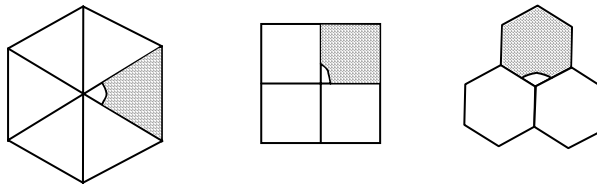
Espero que o leitor tenha ficado estimulado a criar outros exemplos análogos.

A MATEMÁTICA DAS ABELHAS

José Cloves Saraiva - UFMA

◆ Nível Avançado

As abelhas constroem colméias para reservar o mel e para o desenvolvimento e reprodução da sua própria espécie. Cada alvéolo tem a forma de um prisma reto hexagonal fechado numa das extremidades por uma cobertura de três losângos de forma que o volume é máximo enquanto a área lateral total (incluindo a cobertura) é fixada. Com isso as abelhas fazem o menor gasto de cera na construção das paredes peliculares que o constituem. Nesta construção econômica cada parede serve para dois alvéolos contíguos, o que motiva a escolha de prismas retos com seção transversal poligonal regular, como nas figuras abaixo:



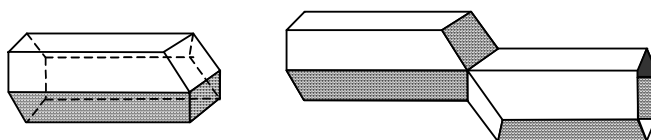
É fácil ver que as formas prismáticas com seção transversal um polígono regular de n lados que podem ser usadas para cobrir o espaço determinadas pela condição de que $\frac{360^\circ}{I_n}$ é um número inteiro positivo, onde I_n é o ângulo interno de um polígono regular.

Podemos escrever $\frac{360^\circ}{I_n} = \frac{360^\circ}{\left(\frac{(n-2)180^\circ}{n}\right)} = \frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{(n-2)} = 2 + \frac{4}{(n-2)}$ que é

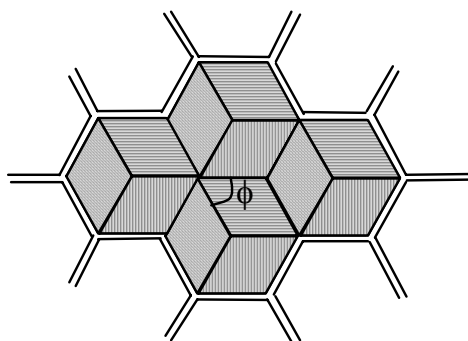
um inteiro positivo se e só se $n-2$ é um divisor de 4, logo devemos ter $n=3$, $n=4$ ou $n=6$ como mostra a figura acima.

Por um cálculo volumétrico simples das três possibilidades acima observando o mesmo volume, ou escolhendo a forma mais convexa, das três acima indicadas a escolha das abelhas pela forma hexagonal é de fato a mais

econômica (dentre um triângulo, um quadrado e um hexágono regulares de mesmo perímetro o hexágono tem a maior área.)



Eis como as abelhas colocam os seus alvéolos hexagonais. Esses alvéolos, para maior economia de material, são fechados por três losangos iguais. O valor constante do melhor ângulo agudo de um losango de fechamento causou sério debate entre teólogos, naturalistas e matemáticos.

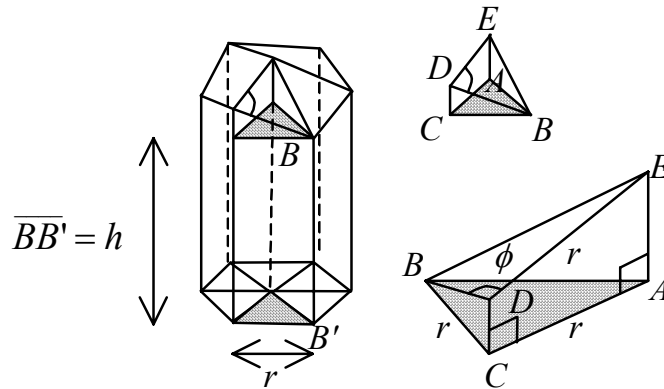


O problema que as abelhas resolvem pode ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos da Matemática elementar.

Como mostra a figura acima, as abelhas fecham uma das bases do prisma com três losangos congruentes cujo ângulo agudo do losango, ϕ , mede aproximadamente $70^{\circ}32'$, o que dá origem ao problema do *ângulo de fechamento da cobertura rômbrica*, que é o seguinte:

De todas as coberturas rômbricas de um prisma reto hexagonal, a que faz volume máximo para área lateral total fixada é formada por três losangos congruentes com ângulo agudo $\phi \cong 70^{\circ}32'$.

Para uma solução deste problema observe primeiro a comparação do prisma hexagonal com a cobertura rômbrica:



A figura também ajuda a obtermos as relações métricas necessárias para deduzir o volume V e a área lateral total S em função do raio r da base hexagonal e do ângulo ϕ , com vértice no ponto D , e os itens seguintes são facilmente comprovados:

- 1) O trapézio $ACDE$ é retângulo com bases \overline{CD} e \overline{AE} perpendiculares ao plano que contém o triângulo equilátero ABC , de lado \overline{AB} medindo r .
- 2) $\overline{EA} = 2\overline{DC}$
- 3) $\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 = r^2 + \frac{\overline{EA}^2}{4}$
- 4) $\frac{\overline{BE}^2}{4} = \overline{BD}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} = \left(r^2 + \frac{\overline{EA}^2}{4} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}$
- 5) $\overline{BE}^2 = \overline{EA}^2 + r^2 \Rightarrow (4r^2 + \overline{EA}^2) \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} = \overline{EA}^2 + r^2 \Rightarrow \overline{EA}^2 = r \left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2}$
- 6) A área lateral total S do prisma é dada por:

$$S = 6 \left[\frac{3}{4} r^2 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \frac{r^2}{4} \left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} + rh \right]$$

Usamos aqui que a área de BDE é $\frac{BD \cdot DE \cdot \text{sen} \phi}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{EA^2}{4} \right) \text{sen} \phi = \frac{3}{8} r^2 \left(1 + \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} \right) \text{sen} \phi = \frac{3}{4} r^2 \text{tg} \frac{\phi}{2} \left(\text{pois } \text{sen} \phi = \frac{2 \text{tg} \frac{\phi}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \right).$$

7) O volume V do prisma é dado por:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 \left[\frac{r}{2} \left(3 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} + h \right]$$

Fixe V , e obtemos a seguinte expressão para S em função de ϕ .

$$S = \frac{3}{2} r^2 \left[3 \text{tg} \frac{\phi}{2} - \left(3 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} \right] + \frac{4V}{\sqrt{3}r}$$

Observando a expressão acima, vemos que ela torna-se mínima se

$\left[3 \text{tg} \frac{\phi}{2} - \left(3 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} \right]$ for mínimo para valores de ϕ com a condição

$\text{tg} \frac{\phi}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. A seguinte desigualdade trigonométrica, que provaremos a seguir, garante o resultado do problema do ângulo (agudo) de fechamento da cobertura do prisma:

Se $S = \text{tg} \frac{\phi}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ então $3 \text{tg} \frac{\phi}{2} - \left(3 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} \geq \sqrt{2}$, valendo a igualdade se e só se $\text{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Demonstração: Para todo ϕ vale:

$$3 \left(\sqrt{2} \text{tg} \frac{\phi}{2} - 1 \right)^2 \geq 0 \Rightarrow 6 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 6\sqrt{2} \text{tg} \frac{\phi}{2} + 3 \geq 0$$

Somando-se $3 \text{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1$ aos dois membros da desigualdade obtemos:

$$9\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + 2 \geq 3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \Rightarrow \left(3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \sqrt{2} \right)^2 \geq 3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\left| 3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \sqrt{2} \right| \geq \left(3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2}, \text{ e como } \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \sqrt{2} > 0, \text{ logo:}$$

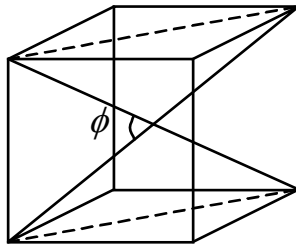
$$3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \sqrt{2} \geq \left(3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} \Rightarrow 3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \left(3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} \geq \sqrt{2}$$

Daí, é claro que, o menor valor de S é determinado pela igualdade:

$$3\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \left(3\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)^{1/2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - 1 \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 70^\circ 32'$$

Finalizando estas notas, sugerimos que o leitor faça a prova de que, o ângulo ϕ é o mesmo ângulo agudo entre diagonais internas de um cubo.



Referência:

- Malba Tahan, *As Maravilhas da Matemática*, Bloch Editores.

O TEOREMA DE RAMSEY

Carlos Gustavo T. de A. Moreira - IMPA

◆ Nível Avançado

1. O teorema de Ramsey para grafos.

Vamos começar este artigo lembrando do exemplo 6 do artigo "O Princípio das Gavetas", de Paulo Cezar Pinto Carvalho, publicado na EUREKA! No. 5: se há 6 pessoas numa reunião então há necessariamente 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente na reunião (onde admitimos que, se a conhece b , então b conhece a). Este exemplo equivale ao seguinte: se tomamos 6 pontos, e pintamos cada segmento que une dois desses pontos de preto ou vermelho então necessariamente existe um triângulo cujos vértices são três desses pontos e cujos 3 lados são da mesma cor.

Nos exercícios 8 e 9 do mesmo artigo é proposta uma generalização:

Proposição 0: Dados os inteiros $a, b \geq 2$ sempre existe um número N inteiro positivo tal que, em qualquer conjunto de N pessoas, sempre existem a pessoas que se conhecem mutuamente ou b pessoas que se desconhecem mutuamente. Em homenagem a *F. P. Ramsey*, que provou este e outros resultados deste artigo, chamamos o menor número N com esta propriedade de $R(a, b)$.

Vamos provar este resultado seguindo os passos propostos do problema 9 do artigo do Prof. Paulo Cezar:

- i) $R(a, 2) = a$ para todo $a \geq 2$.
De fato, num conjunto de a pessoas, ou todas se conhecem ou existem duas que se desconhecem.
- ii) $R(a, b) = R(b, a)$.
De fato, conhecer e desconhecer desempenham um papel simétrico no enunciado.
- iii) $R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$, para $a, b \geq 3$.

Para provar isto, fixemos uma pessoa P . Se temos $R(a-1, b) + R(a, b-1)$ ou mais pessoas na reunião, há pelo menos $R(a-1, b) + R(a, b-1) - 1$ outras pessoas, e um dos seguintes casos se verificará:

- 1) P conhece pelo menos $R(a-1, b)$ pessoas.
Neste caso, por definição de $R(a-1, b)$, dentre essas $R(a-1, b)$ pessoas há b que se desconhecem mutuamente (e não temos mais o que provar), ou $a-1$ que se conhecem mutuamente, e, juntando P a essas $a-1$ pessoas, obtemos a pessoas que se conhecem mutuamente.
- 2) P desconhece pelo menos $R(a, b-1)$ pessoas.
A análise deste caso é análoga à do caso anterior, trocando os papeis de conhecer e desconhecer no argumento \square

Já mencionamos que podemos enunciar resultados deste tipo em termos de colorações de segmentos (ou mais tecnicamente, de arestas de grafos completos) usando duas cores. O resultado acima pode ser generalizado aumentando o número de cores:

Proposição 1: Dados inteiros $k \geq 1, a_1, a_2, \dots, a_k \geq 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que dados n pontos, se pintarmos cada segmento que une dois desses pontos de uma dentre k cores possíveis então haverá a_1 pontos tais que todo segmento que une dois desses pontos é da primeira cor, ou a_2 pontos tais que todos os segmentos que unem dois desses pontos são da segunda cor, ou... ou a_k pontos tais que todos os segmentos que unem dois desses pontos são da k -ésima cor. Chamamos de $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$ o menor número com essa propriedade.

Demonstração: Esta proposição pode ser provada de modo análogo à anterior. A existência dos números $R(a_1, \dots, a_k)$ segue dos seguintes fatos, cuja prova deixamos como exercício:

- i) $R(a_1, \dots, a_{k-1}, 2) = R(a_1, \dots, a_{k-1})$ para $a_1, \dots, a_{k-1} \geq 2$.
- ii) $R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(k)}) = R(a_1, a_2, \dots, a_k)$ para $a_1, \dots, a_k \geq 2$ e qualquer permutação σ de $\{1, 2, \dots, k\}$.
- iii) $R(a_1, \dots, a_k) \leq R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, a_3, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1) - k + 2$.

2. Estimativas de números de Ramsey.

As demonstrações dos resultados anteriores fornecem estimativas superiores para os números de Ramsey $R(a, b)$ e $R(a_1, \dots, a_k)$, por exemplo:

$$i) \quad R(a, b) \leq C_{a+b-2}^{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}, \text{ para } a, b \geq 2$$

De fato vale a igualdade para $b = 2$ (temos os dois lados iguais a a), e se $a, b > 2$ temos, por indução,

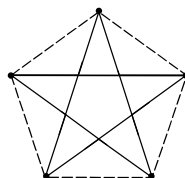
$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1) \leq C_{a+b-3}^{a-2} + C_{a+b-3}^{a-1} = C_{a+b-2}^{a-1} \quad \square$$

$$ii) \quad R(a_1, \dots, a_k) \leq \frac{(a_1 + \dots + a_k - 2k + 2)!}{(a_1 - 1)!(a_2 - 1)!(a_3 - 2)!(a_4 - 2)! \dots (a_k - 2)!} =: C_{a_1 + \dots + a_k - 2k + 2}^{a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 2, \dots, a_k - 2}$$

De fato, isso vale quando todos os a_i exceto dois são iguais a 2, e o caso geral segue, por indução da identidade

$$C_{b_1 + b_2 + \dots + b_k}^{b_1, \dots, b_k} = C_{b_1 + \dots + b_k - 1}^{b_1 - 1, b_2, \dots, b_k} + C_{b_1 + \dots + b_k - 1}^{b_1, b_2 - 1, \dots, b_k} + \dots + C_{b_1 + \dots + b_k - 1}^{b_1, \dots, b_{k-1}, b_k - 1} \quad \square$$

É menos trivial, entretanto, dar boas estimativas inferiores para números de Ramsey. Para provar, por exemplo, que $R(3,3) = 6$, é necessário mostrar que há exemplos de grafos completos bicoloridos de 5 vértices sem triângulos monocromáticos, o que pode ser feito explicitamente:



Se o número de pontos, cresce, entretanto, é bastante difícil construir exemplos explícitos. As melhores estimativas conhecidas para $R(k, k)$ se devem ao método probabilístico introduzido pelo grande matemático húngaro Pál Erdős, que se tornou uma das técnicas mais poderosas da teoria dos grafos:

Proposição 2: $R(k, k) > 2^{k/2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Dados n pontos, pintamos aleatoriamente as arestas que ligam dois desses pontos de vermelho ou preto, com probabilidade $1/2$. Dado um subconjunto de k desses pontos, a probabilidade de que todas as $\frac{k(k-1)}{2}$ arestas

que unem dois desses pontos sejam da mesma cor é $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}$. Como há

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ subconjuntos de k pontos do conjunto inicial de n pontos, a

probabilidade de que em algum deles todas as arestas sejam da mesma cor é no máximo $2C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2} \leq 2 \frac{n^k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}$ que é menor ou igual a $\frac{2^{k/2+1}}{k!}$ se

$n \leq 2^{k/2}$, mas $2^{k/2+1} < k!$ para $k \geq 4$, donde há probabilidade positiva de que em nenhum subconjunto de k pontos todas as arestas sejam da mesma cor, e em particular há exemplos desta situação, donde $R(k, k)$ é necessariamente maior que $2^{k/2}$ para $k \geq 4$.

Para $k = 3$, $R(k, k) = 6 > 2^{3/2}$, e para $k = 2$, $R(k, k) = 2 > 2^{1/2}$, o que conclui a demonstração \square

Vamos discutir agora como estimar a função $f(n) = R(3, 3, \dots, 3)$, com n termos iguais a 3, ou seja, o menor número de vértices de um grafo completo tal que ao pintarmos suas arestas usando n cores necessariamente obtemos um triângulo monocromático.

A demonstração da proposição 1 nos fornece $f(n) \leq nf(n-1) - n + 2$, o que implica, por exemplo, $f(n) \leq 3n!$ para todo $n \geq 2$. (lembramos que $f(3) = R(3, 3) = 6$).

Suponha agora que sejam dados $\frac{3^n + 1}{2}$ pontos, aos quais atribuímos índices 0, 1,

2, ... $\frac{3^n - 1}{2}$. Vamos descrever uma forma de, a cada par desses pontos, atribuir

um número entre 0 e $n - 1$ (o que equivale a colorir as arestas do grafo completo

de $\frac{3^n + 1}{2}$ vértices usando n cores), sem que haja 3 pontos tais que a cada par

desses pontos é atribuído o mesmo número (ou seja, sem que haja triângulos monocromáticos).

Ao par de pontos de índices i e j atribuímos um número da seguinte maneira:

escrevemos $|i - j|$ como $\sum_{r=0}^{n-1} \sigma_r \cdot 3^r$ onde $\sigma_r \in \{-1, 0, 1\}$ para todo r , e atribuímos a

$\{i, j\}$ o menor k com $\sigma_k = 1$ (sempre existe um tal k pois $|i - j| > 0$).

Deixamos como exercício para o leitor verificar que não há triângulos monocromáticos nesta configuração (ver problema proposto N.º 32 pág 55).

Obtemos assim a estimativa $f(n) > \frac{3^n + 1}{2}$.

Determinar exatamente os valores de números de Ramsey clássicos $R(a, b)$ com $3 \leq a \leq b$ que são conhecidos são: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$, e $R(4, 5) = 25$.

O único número Ramsey com mais de duas cores cujo valor é conhecido é $R(3, 3, 3) = 17$.

3. O Teorema de Ramsey para multigrafos:

Até agora estivemos falando sobre colorações de arestas de grafos, ou seja, a cada conjunto de dois vértices associamos uma cor. Uma maneira de generalizar este resultado é associar cores não a pares de vértices, mas a conjuntos de m vértices, onde m é um inteiro positivo fixo (que pode ser maior que 2). Como as configurações que aparecem são um pouco mais complicadas, vamos introduzir notações um pouco mais formais:

Dado um conjunto A e um inteiro positivo k denotamos por $[A]^m$ o conjunto dos subconjuntos de m elementos de A , ou seja $[A]^m = \{B \subset A \mid \#B = k\}$.

Dado j inteiro positivo, definimos $I_j = \{1, 2, \dots, j\}$.

A versão m -dimensional (ou para m -hipergrafos) do teorema de Ramsey é dada pelo seguinte teorema (do qual os resultados da seção 1 são casos particulares):

Teorema (Ramsey): Sejam m, k inteiros positivos. Dados a_1, a_2, \dots, a_k inteiros positivos existe um inteiro positivo, que denotaremos por $R_m(a_1, \dots, a_k)$ tal que para todo $n \geq R_m(a_1, \dots, a_k)$ e para qualquer função $f: [I_n]^m \rightarrow I_k$ existem $j \in I_k$ e $A \subset I_n$ com $\#A = a_j$ tal que $f([A]^m) := \{f(x), x \in [A]^m\} \subseteq \{j\}$.

Demonstração: Para $m = 1$ o resultado é uma aplicação simples, do princípio das gavetas: basta tomar $R_1(a_1, \dots, a_k) = a_1 + \dots + a_k - k + 1$. Vamos provar o resultado geral por indução em m . De fato, provaremos que podemos tomar

$R_m(a_1, \dots, a_k) \leq 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, \dots, a_k), R_m(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, a_2, \dots, a_k - 1))$
(e se algum dos a_i é menor que m podemos tomar $R_m(a_1, \dots, a_k) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$). Note que isto fornece exatamente a recursão de proposição 1 da seção 1 no caso $m = 2$.

Se $n \geq 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, a_2, \dots, a_k - 1))$, dada uma função $f: [I_n]^m \rightarrow I_k$, definimos uma função $\tilde{f}: [I_{n-1}]^{m-1} \rightarrow I_k$ da seguinte forma: dado $A \in [I_{n-1}]^{m-1}$, definimos $\tilde{f}(A) := f(A \cup \{n\})$. Como $n - 1 \geq R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, \dots, a_k - 1))$, existem $j \in I_k$ e $B \subset I_{n-1}$ com $\#B = R_m(a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$ tal que $f([B]^{m-1}) = \{j\}$. Agora, por definição de $R_m(a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$ existe $i \in I_k$ com $i \neq j$ e $A \subset B$ com $\#A = a_i$ e $f([A]^m) = \{i\}$, caso em que já conseguimos o que queríamos, ou existe $A \subset B$ com $\#A = a_j - 1$ e $f([A]^m) = \{j\}$. Nesse caso, teremos $\#(A \cup \{n\}) = a_j$ e $f([A \cup \{n\}]^m) = \{j\}$, pois $A \subset B$, e novamente conseguimos nosso objetivo.

Obs.: O único número de Ramsey cujo valor é conhecido com $m > 2$ (e $a_j > m, \forall j$) é $R_3(4,4) = 13$.

O exercício 20 de [PC] pede para mostrar que dados 5 pontos no plano em posição geral há 4 que formam um quadrilátero convexo. O leitor poderia perguntar: o que faz um problema geométrico como este num artigo de combinatória? A resposta está ligada a uma generalização deste resultado, descoberta por Erdős e Szekeres:

Dado um inteiro positivo $n \geq 4$ existe um inteiro positivo $f(n)$ tal que dados $f(n)$ pontos no plano em posição geral há n deles que são vértices de um n -ágono convexo.

Para provar isso, mostraremos que podemos tomar $f(n) = R_4(n,5)$. Para isso, dados $R_4(n,5)$ pontos no plano, e um conjunto de 4 desses pontos, associamos a esse conjunto o número 1 se eles formam um quadrilátero convexo, e 2 em caso contrário. Não é possível que haja 5 pontos tais que a cada 4 deles é associado o número 2, pelo resultado do exercício 20 de [PC], donde, por definição de $R_4(n,5)$, necessariamente há n desses pontos tais que cada 4 desses pontos formam um quadrilátero convexo, mas isso implica que esses n pontos são vértices de um n -ágono convexo.

5. O teorema de Ramsey infinito:

Teorema: Sejam m, k inteiros positivos e A um conjunto infinito.

Para qualquer função $f: [A]^m \rightarrow I_k$ existem $j \in I_k$ e um conjunto infinito

$B \subset A$ tal que $f([B]^m) = \{f(x) \mid x \in [B]^m\} = \{j\}$

Demonstração: Vamos provar o resultado por indução em m . Para $m = 1$ o resultado segue do fato de que se X é infinito e C é finito então para toda função $f: X \rightarrow C$ existe $C \in C$ tal que $f^{-1}(c) = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ é infinito.

Seja agora $m \geq 2$ e $f: [A]^m \rightarrow I_k$, onde A é infinito. Fixamos $x_o \in A$, e definimos $A_o = A \setminus \{x_o\}$ e $g: [A_o]^{m-1} \rightarrow I_k$ por $g(C) := f(C \cup \{x_o\})$, onde C é um subconjunto de $m-1$ elementos de A_o . Pela hipótese de indução existe um conjunto infinito $B_o \subset A_o$ e $j_o \in I_k$ tal que $g_o([B_o]^{m-1}) = \{j_o\}$. A partir daí repetimos o processo recursivamente: dado $n \geq 0$ fixamos $x_{n+1} \in B_n$ e definimos $A_{n+1} = B_n \setminus \{x_{n+1}\}$ e $g_{n+1}: [A_{n+1}]^{m-1} \rightarrow I_k$ por $g_{n+1}(C) = f(C \cup \{x_{n+1}\})$ para $C \subset A_{n+1}$ com $m-1$ elementos. Pela hipótese de indução existe $B_{n+1} \subset A_{n+1}$ infinito e $j_{n+1} \in I_k$ tal que $g([B_{n+1}]^{m-1}) = \{j_{n+1}\}$.

Podemos agora tomar $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, que é um conjunto infinito e definir $h: D \rightarrow I_k$ por $h(x_r) = j_r$. Como I_k é finito, existe $j \in I_k$ tal que $h^{-1}(j) = \{x \in D \mid h(x) = j\}$ é infinito. Afirmamos que $B = h^{-1}(j)$ satisfaz a condição do enunciado. De fato, dado um subconjunto $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ de B com m elementos, temos $f(X) = g_{i_1}(\{x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}) = j_{i_1} = h(x_{i_1}) = j \quad \square$

Sugestão: Tente usar os resultados deste artigo para resolver o problema “Cuático” da Eureka! N°5. Pág. 58. (ver também pág. 56 desta EUREKA!).

Referências:

- [R]- Ramsey, F.P., On a Problem of Formal Logic, Proc. London Math. Soc. 30 (1930) P P. 264-286.
- [PC]- Paulo Cezar Pinto Carvalho, Princípio das Gavetas – Eureka! 5 PP.27-33.
- [GRS]- R.L. Graham, B.L. Rothschild, e J.H. Spencer, Ramsey Theory. Wiley. Interscience, 1990.
- [ES]- Erdős e G. Szekeres – A Combinatorial Problem in Geometry – Compositio Math.2 (1935), PP-464-470.
- [Rad]- Stanislaw P. Radziszowski – “Smal “Ramsey Numbers – Dinamic Surveys- Electronic Journal of Combinatorics. <http://www.combinatorics.org>
- [Er]- Pál Erdős, Some Remarks on The Theory Of Graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), PP.292-294.

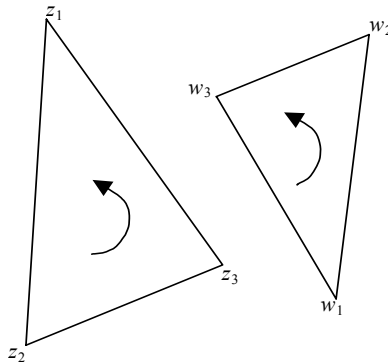
APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS À GEOMETRIA

Edmilson Motta - Colégio Etapa

◆ Nível Avançado

É importante ter em mente que os números complexos não são apenas vetores; eles podem ser multiplicados. Nas aplicações à Geometria, nós faremos uso extensivo desta propriedade. Números Complexos são particularmente eficientes para certos tipos de problemas, mas podem gerar dificuldades artificiais em problemas que admitem soluções mais diretas utilizando outros métodos.

Na Geometria Elementar, os triângulos são as peças básicas e a congruência e a semelhança de triângulos, os conceitos fundamentais. Nós começaremos caracterizando a semelhança de triângulos em termos de números complexos. Inicialmente, vamos estabelecer algumas convenções. Sejam $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ números complexos. Nós dizemos que $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle w_1 w_2 w_3$ são semelhantes, e escrevemos $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$, se e somente se, o ângulo em z_k é igual ao ângulo em w_k , $k = 1, 2, 3$, e têm mesma orientação, isto é, ambos anti-horários ou ambos horários (Veja figura a seguir.)



Se os triângulos tem orientações distintas (um horário, o outro anti-horário), então escrevemos

$$\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 \text{ (reverso)}$$

Como para complexos α, β e γ distintos,

$$\arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha) = \text{medida do ângulo orientado entre}$$

$\vec{\alpha\gamma}$ e $\vec{\alpha\beta}$, então α, β, γ são colineares \Leftrightarrow a medida do ângulo orientado entre $\vec{\alpha\gamma}$ e $\vec{\alpha\beta}$ é múltipla de π

$$\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \overline{\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\gamma - \alpha}}.$$

Exercício 1:

Mostre que $\vec{\alpha\beta} \perp \vec{\alpha\gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ é imaginário puro $\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} + \frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\gamma - \alpha}} = 0$.

Generalizando, para quatro pontos distintos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$,

$$\vec{\alpha\beta} \parallel \vec{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} = \frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\delta - \gamma}},$$

além disso, $\vec{\alpha\beta}$ e $\vec{\gamma\delta}$ tem a mesma direção se, e somente se, $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$ é um real

positivo; $\vec{\alpha\beta} \perp \vec{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$ é imaginário puro $\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} + \frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\delta - \gamma}} = 0$.

Exercício 2:

Mostre que, se $\alpha\beta \neq 0$, então $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$.

Teorema: $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Demonstração: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, (caso LAL) as razões entre as medidas de dois pares de lados correspondentes são iguais e os ângulos entre estes lados são iguais (incluindo a orientação).

Assim,

$$\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \text{ e } \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário:

$$\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 \text{ (reverso)} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração: Temos que $\triangle \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ (reverso). Logo

$$\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 \text{ (reverso)} \Leftrightarrow \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$$

Exercício 3:

Complete a demonstração acima, verificando que $\triangle \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ (reverso).

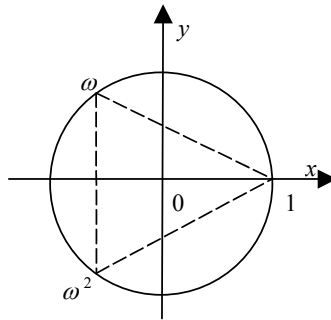
Vejamos agora alguns exemplos de aplicações mais específicas.

• **CARACTERIZAÇÕES DOS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS.**

Seja $\omega^2 + \omega + 1 = 0$,

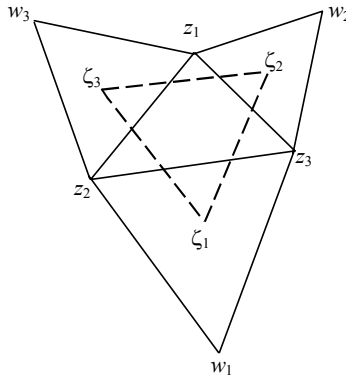
$$\begin{aligned} \triangle z_1 z_2 z_3 \text{ é equilátero} &\Leftrightarrow \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle z_3 z_1 z_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \cdot (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) = 0 \text{ ou } (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle 1 \omega \omega^2 \text{ ou } \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle 1 \omega^2 \omega \end{aligned}$$

(geometricamente, esta última caracterização é bastante intuitiva).



• O TEOREMA DE NAPOLEÃO.

Sobre cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero (no exterior). Temos então que os baricentros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.



Demonstração:

Sejam $\triangle z_1 z_2 z_3$ o triângulo dado; $\triangle w_1 z_3 z_2$, $\triangle z_3 w_2 z_1$, $\triangle z_2 z_1 w_3$ triângulos equiláteros com a mesma orientação que $\triangle 1 \omega \omega^2$, digamos; e ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , os baricentros desses triângulos. Então

$$\begin{cases} w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0 \\ z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0 \\ z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0 \end{cases}$$

Para provarmos que $\triangle \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ é equilátero, calculamos

$$\begin{aligned}\zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{1}{3}((w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)) = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\triangle \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ é um triângulo equilátero.

Exercício 4:

Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ números complexos, temos que

$$(\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \delta) + (\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \delta)$$

(a) A partir da identidade acima, mostre que

$$|\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| \cdot |\beta - \gamma| \geq |\alpha - \gamma| \cdot |\beta - \delta|.$$

(b) Demonstre o teorema de Ptolomeu-Euler:

Para quaisquer pontos A, B, C, D no plano, $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$, com igualdade se, e somente se, estes quatro pontos são concíclicos ou colineares.

Exercício 5:

(a) Sejam a, b, c, d, e, f números complexos. Prove que

$$\frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{c-d}{e-d} \cdot \frac{e-f}{a-f} = 1 \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-e}{f-e} \cdot \frac{f-d}{b-d} = 1.$$

(b) Utilizando o item anterior, resolva o seguinte problema do banco da IMO 98:

Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ e $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$.

Prove que $\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$.

MAIS EXEMPLOS

PROBLEMA (BANCO / IMO 98)

Seja ABC um triângulo, H o seu ortocentro, O o seu circuncentro e R o seu circunraio. Seja D o simétrico de A com relação a BC , E o simétrico de B com relação a AC e F o simétrico de C com relação a AB .

Prove que D, E e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.

RESOLUÇÃO:

Sejam a, b, c, h e 0 as coordenadas complexas do A, B, C, H e O , respectivamente. Conseqüentemente, $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=R^2$ e $h = a + b + c$. Como D é o simétrico de A com relação a BC , d satisfaz

$$\frac{d-b}{c-b} = \overline{\left(\frac{a-b}{c-b}\right)} \Leftrightarrow \left(\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{c}-\bar{b}}\right)d - (b-c)\bar{a} + \left(\frac{\bar{b}\bar{c}-\bar{b}\bar{c}}{\bar{c}-\bar{b}}\right) = 0. \quad (1)$$

Temos que

$$\bar{b}-\bar{c} = -\frac{R^2(b-c)}{bc} \text{ e } \bar{b}\bar{c}-\bar{b}\bar{c} = \frac{R^2(b^2-c^2)}{bc},$$

substituindo em (1), obtemos

$$d = \frac{-bc+ca+ab}{a} = \frac{k-2bc}{a},$$

$$d = \frac{R^2(-a+b+c)}{bc} = \frac{R^2(h-2a)}{bc},$$

onde $k = bc + ca + ab$. Analogamente

$$e = \frac{k-2ca}{b}, \quad e = \frac{R^2(h-2b)}{ca}, \quad f = \frac{k-2ab}{c} \text{ e } f = \frac{R^2(h-2c)}{ab}.$$

Como

$$\Delta = \begin{vmatrix} d & \bar{d} & 1 \\ e & \bar{e} & 1 \\ f & \bar{f} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e-d & \bar{e}-\bar{d} \\ f-d & \bar{f}-\bar{d} \end{vmatrix} = \left| \frac{(b-a)(k-2ab)}{ab} \quad \frac{R^2(a-b)(h-2c)}{abc} \right|$$

$$\left| \frac{(c-a)(k-2ca)}{ca} \quad \frac{R^2(a-c)(h-2b)}{abc} \right|$$

$$= \frac{R^2(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2} \times \left| \begin{matrix} -(ck-2ab\bar{c}) & (h-2c) \\ (bk-2ab\bar{b}) & -(h-2b) \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{-R^2(b-c)(c-a)(a-b)(hk-4abc)}{a^2b^2c^2}$$

e $\bar{h} = R^2k/abc$, segue que D, E e F são colineares

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta &= 0 \\ \Leftrightarrow hk - 4abc &= 0 \\ \Leftrightarrow h\bar{h} &= 4R^2 \\ \Leftrightarrow OH &= 2R \end{aligned}$$

PROBLEMA (Olimpíada Chinesa 98)

Seja D um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC , com $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$. Determine quais são as possíveis posições que D pode ocupar.

RESOLUÇÃO:

Sejam a, b, c , e 0 as coordenadas complexas de A, B, C e D , respectivamente. Temos, então que $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$
 $\Leftrightarrow |a \cdot b \cdot (b-a)| + |b \cdot c \cdot (c-b)| + |c \cdot a \cdot (a-c)| = |(b-a)(c-b)(a-c)|$ (*)

Como

$ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c) = -(b-a)(c-b)(a-c)$, sendo $w_1 = ab(b-a)$, $w_2 = bc(c-b)$, $w_3 = ca(a-c)$, (*) $\Leftrightarrow |w_1| + |w_2| + |w_3| = |w_1 + w_2 + w_3|$ e portanto, w_1, w_2, w_3 estão alinhados.

Assim, existem reais positivos α e β tais que

$$\begin{cases} w_1 = \alpha w_2 \\ w_1 = \beta w_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(b-a) = \alpha bc(c-b) \\ ab(b-a) = \beta ca(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(b-a) = \alpha c(c-b) \\ b(b-a) = \beta c(a-c) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{b-c}{a-c}$$

isto é, $\angle A\hat{C}B = 180^\circ - \angle A\hat{D}B$ e, analogamente, $\angle A\hat{B}C = 180^\circ - \angle A\hat{D}C$ e $\angle B\hat{A}C = 180^\circ - \angle B\hat{D}C$. O único ponto D no interior de um triângulo acutângulo que satisfaz essas condições é o ortocentro.

PROBLEMA (Olimpíada Universitária Húngara 1995)

São dados n pontos na circunferência unitária de modo que o produto das distâncias de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que os pontos são vértices de um n -ágono regular.

RESOLUÇÃO:

Considere a circunferência centrada na origem e sejam z_1, z_2, \dots, z_n os números complexos que representam os pontos. Podemos assumir que $(-1)^n \cdot z_1 \cdot z_2 \dots z_n = 1$ (verifique!).

Considere ainda o seguinte polinômio

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2) \dots (w - z_n) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + 1 = w^n + Q(w) + 1$$

Então $|p(z)|$ é o produto das distâncias do ponto representado pelo número complexo z aos pontos dados.

Logo, se z é um número complexo de módulo 1, então $|p(z)| \leq 2$.

Sejam w_1, w_2, \dots, w_n as raízes n -ésimas da unidade.

Sabe-se que $w_1^k + w_2^k + \dots + w_n^k = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Portanto $Q(w_1) + Q(w_2) + \dots + Q(w_n) = 0$. Se $Q(w)$ não é identicamente nulo, então, para algum j , $Q(w_j)$ é diferente de zero e tem parte real não negativa, pois $Q(0) = 0$ e Q tem no máximo $n - 1$ raízes. Consequentemente, $|p(w_j)| = |2 + Q(w_j)| > 2$, uma contradição.

Desta forma o polinômio Q é identicamente nulo e $p(z) = z^n + 1$. As raízes z_1, z_2, \dots, z_n do polinômio $p(z)$ formam um n -ágono regular.

Mais alguns exercícios relacionados.

PROBLEMA 1 (IMO 63)

Todos os ângulos internos de um n -ágono são iguais e seus lados satisfazem a relação $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Prove que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

PROBLEMA 2 (Treinamento para IMO 92)

Prove que para todo inteiro positivo n , $(2 + i)^n \neq (2 - i)^n$. Conclua que os ângulos agudos do triângulo de lados 3, 4 e 5 são irracionais quando expressos em graus.

PROBLEMA 3 (IMO 75)

Determine se existem ou não 1975 pontos sobre a circunferência unitária tais que a distância entre quaisquer dois é um número racional.

PROBLEMA 4 (Olimpíada Romênia 92)

Sejam $p, q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$. Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ têm o mesmo módulo, mostre que $\frac{p}{q}$ é um número real.

PROBLEMA 5 (Seleção para IMO 92)

A área do polígono $A_1A_2\dots A_n$ é S . São dados um ângulo α e um ponto Q . Rodemos Q de um ângulo α no sentido anti-horário ao redor de A_i para encontrar um ponto P_i . Ache a área de $P_1P_2\dots P_n$.

PROBLEMA 6 (Putnam 67)

Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em uma circunferência de raio r . Mostre que se $AB = CD = EF = r$, então os pontos médios de \overline{BC} , \overline{DE} , e \overline{FA} são os vértices de um triângulo equilátero.

PROBLEMA 7 (IMO 86)

São dados um triângulo $A_1A_2A_3$ e um ponto P_0 no plano. Definimos $A_s = A_{s-3}$ para todo $s \geq 4$ e construímos uma seqüência de pontos P_0, P_1, P_2, \dots tais que P_{k+1} é a imagem de P_k sob a rotação com centro A_{k+1} e ângulo de 120° (sentido horário). Prove que se $P_{1986} = P_0$, então o triângulo $A_1A_2A_3$ é equilátero.

PROBLEMA 8 (Olimpíada Hungria 1899)

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 dividem a circunferência unitária em cinco partes iguais. Prove que $(A_0A_1 \cdot A_3A_2)^2 = 5$.

PROBLEMA 9 (Putnam 55)

A_1, A_2, \dots, A_n é um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio r e centro O . P é um ponto sobre $\overrightarrow{OA_1}$. Mostre que $\prod_{k=1}^n PA_k = OP^n - r^n$.

PROBLEMA 10

Dados um ponto P sobre uma circunferência unitária e os vértices A_1, A_2, \dots, A_n de um n -ângulo regular inscrito, prove que $PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_n^2$ e $PA_1^4 + PA_2^4 + \dots + PA_n^4$ são constantes.

Bibliografia:

- Complex numbers & Geometry, The Mathematical Association of America
Liang - Shin Hahn, 1994.

**40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL E 14ª. OLIMPÍADA
IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA**

Segundo teste de Seleção

PROBLEMA 1

Encontre todos os inteiros positivos l, m, n , primos dois a dois, tais que $(l + m + n)(1/l + 1/m + 1/n)$ é um inteiro positivo.

PROBLEMA 2

Considere $\triangle ABC$ inscrito em uma circunferência fixa. Sejam D, E e F pontos arbitrários distintos dos vértices, pertencentes aos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} , respectivamente. Sejam P, Q e R os pontos de intersecção das retas AD, BE e CF com a circunferência, respectivamente. Mostre que

$$\frac{AD}{PD} + \frac{BE}{QE} + \frac{CF}{RF} \geq 9.$$

Determine também as condições sobre o $\triangle ABC$ e os pontos D, E e F para que a igualdade ocorra.

PROBLEMA 3

Para n natural, seja $\phi(n)$ a quantidade de números naturais que são primos com n e $\psi(n)$ o número de fatores primos de n . Mostre que se $\phi(n)$ é um divisor de $n - 1$ e $\psi(n) \leq 3$, então n é primo.

PROBLEMA 4

Para reais positivos satisfazendo $a + b + c = abc$, mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}, \text{ e determine quando a igualdade ocorre.}$$

PROBLEMA 5

Seja I o incentro de $\triangle ABC$, O_1 uma circunferência passando por B e tangente à reta CI e O_2 uma circunferência passando por C e tangente à reta BI . Mostre que a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e as circunferências O_1 e O_2 interceptam-se em um único ponto.

PROBLEMA 6

Seja F_n o conjunto de todas as bijeções f de $\{1, \dots, n\}$ em $\{1, \dots, n\}$ satisfazendo

(i) $f(k) \leq k+1$ para $k = 1, 2, \dots, n$ e (ii) $f(k) \neq k$ para $k = 2, \dots, n$.

Determine a probabilidade de que $f(1) \neq 1$ para um f arbitrário em F_n

10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Primeiro teste de Seleção

PROBLEMA 1

Em um tabuleiro 1999×1999 encontra-se um certo número de torres (torre é uma peça que se move horizontalmente ou verticalmente). Prove que é possível colorir as torres utilizando três cores de modo que nenhuma torre ataque outra de mesma cor (uma torre ataca outra quando ambas estão na mesma linha ou coluna sem peças intermediárias).

PROBLEMA 2

Encontre todas as soluções reais de $x \cdot [x \cdot [x \cdot [x]]] = 88$, onde $[x]$ é o inteiro satisfazendo $[x] \leq x < x+1$ (por exemplo, $[3, 7] = 3$, $[4] = 4$ e $[-\pi] = -4$).

PROBLEMA 3

A bissetriz do ângulo B em um triângulo ABC intercepta o lado AC no ponto D .

Seja E um ponto sobre o lado BC tal que $\widehat{CAE} = \widehat{BAE}$. Os segmentos BD e AE interceptam-se no ponto P . Se $ED = AD = AP$, determine os ângulos do triângulo.

PROBLEMA 4

Mostre que há infinitos naturais n tais que n^{2+1} divide $n!$, onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

PROBLEMA 5

Considere um polígono convexo com 2000 lados no plano. Prove que é possível escolher 1998 pontos no plano tais que qualquer triângulo formado por vértices do polígono tenha exatamente um dos pontos escolhidos em seu interior.

10ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Segundo teste de Seleção

PROBLEMA 1

Sejam p, q, r, s inteiros não negativos tais que

$$(p+q)^2 + q = (r+s)^2 + s$$

Prove que $p = r$ e $q = s$.

PROBLEMA 2

As mn casas de um tabuleiro $m \times n$ ($m, n > 1$ inteiros) são pintadas alternadamente de branco e preto, como em um tabuleiro de xadrez. Em seguida, colocamos em cada casa um número inteiro, de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam pares. Prove que a soma dos números escritos nas casas pretas é par.

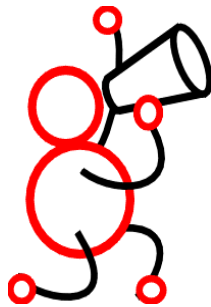
PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um paralelogramo, H o ortocentro do triângulo ABD e O o circuncentro do triângulo BCD . Prove que os pontos H, O e C são colineares.

PROBLEMA 4

Determine todos os ternos (a, b, c) de inteiros positivos tais que a e b são pares e

$$a^b + b^a = 2^c.$$



Você sabia...

Que o record de maior primo de Fermat generalizado (i. e., da forma $a^{2^n} + 1$) conhecido foi batido em 2/11/1999?

Este primo é $114024^{16384} + 1$, tem 82854 dígitos e foi descoberto por Kimmo Herranen, usando um programa desenvolvido por Yves Gallot (veja <http://perso.wanadoo.fr/yves.gallot/primes/gfn.html>)

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS PROPOSTOS

 Publicamos aqui algumas das respostas enviadas por nossos leitores.

10) Suponha que temos k moedas, todas iguais exceto por uma que tem peso ligeiramente diferente das anteriores (não se sabe se maior ou menor), e uma balança de dois pratos.

- a) Mostre que se $k \leq \frac{3^n - 3}{2}$ é possível determinar com n pesagens qual é a moeda diferente, e se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.
- b) Mostre que se $k = \frac{3^n - 1}{2}$ é possível determinar com n pesagens qual é a moeda diferente, mas nem sempre é possível dizer se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.
- c) Mostre que se $k > \frac{3^n - 1}{2}$ não é sempre possível determinar qual é a moeda diferente.

Solução do Editor:

Fato 1: Se tivermos 3^n ou menos moedas com apenas uma diferente, e que seja sabido se a moeda diferente é mais leve ou mais pesada então é possível determinar a moeda diferente com apenas n pesagens.

Prova: Se $n = 0$ a afirmação é óbvia. Vamos provar o fato por indução. Se tivermos 3^{n+1} ou menos moedas de modo que uma delas é, digamos, mais pesada que as outras, dividimos as moedas em três grupos, A , B e C , de 3^n ou menos moedas cada, de modo que A e B tenham o mesmo número de moedas. Pesamos o grupo A com o grupo B . Se os pesos forem diferentes, o grupo mais pesado tem 3^n ou menos moedas e contém a moeda diferente, e portanto podemos, com mais n pesagens (por hipótese de indução), determiná-la. Se os pesos forem iguais a moeda mais pesada estará no grupo C , e, como antes, podemos determiná-la em mais n pesagens.

Corolário 1:

Se tivermos $k \leq \frac{3^n - 1}{2}$ moedas das quais uma é diferente, e tivermos um grupo de pelo menos $\left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil \leq 3^{n-1}$ moedas padrão então é possível determinar a moeda diferente e se ela é mais leve ou mais pesada com n pesagens.

Prova: Separamos um grupo A de $\left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil \leq 3^{n-1}$ moedas dentre as $\frac{3^n - 1}{2}$, e pesamos com um grupo de $\left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil \leq 3^{n-1}$ moedas padrão. Se der diferente saberemos que a moeda diferente está no grupo A e se ela é mais leve ou mais pesada, e, usando o Fato 1, podemos determiná-la com mais $n - 1$ pesagens.

Se der igual a moeda diferente está no grupo das $k - \left\lceil \frac{2k+1}{3} \right\rceil \leq \frac{3^n - 1}{2} - 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2}$ moedas restantes, o que prova o corolário por indução, dado que temos uma quantidade suficiente de moedas padrão e, para $n = 1$, se tivermos uma moeda padrão é só pesá-la com a moeda diferente para descobrir se esta é mais leve ou mais pesada.

Corolário 2:

Se tivermos $k \leq \frac{3^n + 1}{2}$ moedas das quais uma é diferente e tivermos pelo menos $\left\lceil \frac{2k-1}{3} \right\rceil \leq 3^{n-1}$ moedas padrão então é possível determinar com n pesagens a moeda diferente.

Prova: Para $n = 1$ temos 2 moedas. Pesamos uma delas com uma moeda padrão. Se der diferente é ela a diferente, se der igual é a outra. O resto da prova (por indução) é igual à do corolário 1.

Fato 2: Se tivermos dois grupos A e B de $k \leq \frac{3^n - 1}{2}$ moedas cada uma das quais é diferente tais que o peso total de A é maior que o peso total de B e pelo

menos $2 \left\lceil \frac{2k+1}{9} \right\rceil \leq 2 \cdot 3^{n-2}$ moedas padrão então é possível determinar com n pesagens a moeda diferente e se ela é mais leve ou mais pesada.

Prova: Seja $r = \left\lceil \frac{2k+1}{9} \right\rceil \leq 3^{n-2}$. Pesamos de um lado $2r$ moedas do grupo A , r do grupo B e do outro r moedas do grupo A , r do grupo B e $2r$ moedas padrão. Se o primeiro lado tiver peso maior dividimos suas $2r$ moedas do grupo A em dois grupos de r e os pesamos. Se der igual a moeda diferente será mais leve e estará entre as $r \leq 3^{n-2}$ moedas do grupo B que estavam do outro lado. Se der diferente a moeda diferente será mais pesada e estará no lado mais pesado nessa última pesagem. Nesses casos o Fato 1 implica o resultado pois com mais $n-2$ pesagens descobrimos a moeda diferente. Se o primeiro lado tiver peso menor a análise é análoga, trocando os papéis dos grupos A e B .
Finalmente, se der igual a moeda diferente estará nos grupos $A' \subset A$ ou $B' \subset B$ de $k - 3 \left\lceil \frac{2k+1}{9} \right\rceil \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ moedas que não foram pesadas, e o resultado segue por indução (O caso $n=1$ é trivial) \square

Vamos agora resolver os itens originais do problema:

- a) Se temos $k \leq \frac{3^n - 3}{2}$ moedas pesamos dois grupos de $m = \left\lceil \frac{k-1}{3} \right\rceil \leq \frac{3^n - 1}{2}$ moedas cada. Se der diferente usamos o Fato 2, e se der igual usamos o Corolário 1 para as $k - 2m \leq \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ moedas restantes.
- b) Se temos $k = \frac{3^n - 1}{2}$ pesamos dois grupos de $\frac{3^{n-1} - 1}{2}$ moedas cada. Se der diferente usamos o Fato 2, e se der igual usamos o Corolário 2 para as $\frac{3^{n-1} + 1}{2}$ moedas restantes.

Para ver que não é possível descobrir a moeda diferente e se ela é mais leve ou mais pesada com n pesagens, observamos que se na primeira pesagem pesamos mais que $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ moedas em cada prato e der diferente, teremos no mínimo $2\left(\frac{3^{n-1}+1}{2}\right) = 3^{n-1}+1 > 3^{n-1}$ possibilidades para a moeda diferente, e não podemos distingui-las com $n-1$ pesagens (que dão no máximo 3^{n-1} possíveis resultados finais). Assim, devemos ter no máximo $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ moedas em cada prato na primeira pesagem, e se der igual sobram pelo menos $\frac{3^{n-1}+1}{2}$ moedas. O resultado seguirá do

Lema: Se temos $\frac{3^k+1}{2}$ moedas das quais sabemos apenas que uma é diferente, e algumas moedas padrão não podemos distinguir a moeda diferente e se ela é mais leve ou mais pesada com k pesagens.

Prova: Pelo argumento acima, não podemos usar mais de 3^{k-1} moedas desconhecidas na primeira pesagem, e se esta der equilíbrio sobram pelo menos $\frac{3^{k-1}+1}{2}$ moedas, e o resultado segue por indução (o caso $k=0$ é trivial).

- c) Como antes não podemos usar mais que $\frac{3^n-1}{2}$ moedas em cada prato na primeira pesagem, e se esta der igual sobrarão pelo menos $\frac{3^{n-1}+3}{2}$ moedas, caso em que não é possível determinar a moeda diferente com mais $n-1$ pesagens, o que pode ser provado do mesmo modo que o lema anterior \square

16) Seja l a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, C_1 o círculo centrado em $(0, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$ e C_2 o círculo centrado em $(1, \frac{1}{2})$ de raio $\frac{1}{2}$.

Seja F o conjunto de círculos em \mathbb{R}^2 com as seguintes propriedades:

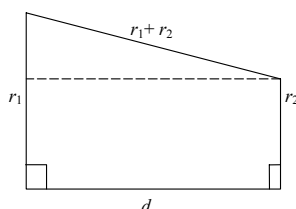
- i) $\{C_1, C_2\} \subset F$
- ii) Se C e C' pertencem a F , são tangentes entre si e tangentes a l então todo círculo \tilde{C} tangente aos dois círculos C e C' e à reta l pertence a F .
- iii) Se \tilde{F} é um conjunto de círculos satisfazendo as propriedades i) e ii) então $F \subset \tilde{F}$. Determine o conjunto dos pontos de tangência dos círculos $C \in F$ com a reta l .

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro - RJ):

O conjunto dos pontos de tangência será o conjunto $\{(x, 0), x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$. Cada racional $x \in [0, 1]$ será representado por $\frac{p}{q}$ onde p é inteiro, q é inteiro positivo e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Para provar isso mostraremos os seguintes fatos por indução:

- i) O círculo tangente em $(\frac{p}{q}, 0)$ terá raio $\frac{1}{2q^2}$.
- ii) Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$

Para isso, notemos que se dois círculos centrados em (x, r_1) e (y, r_2) são tangentes à reta l e tangentes entre si então $(r_1 - r_2)^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow d^2 = 4r_1r_2 \Rightarrow d = 2\sqrt{r_1r_2}$, onde $d = |x - y|$.



As afirmações i) e ii) são verdadeiras para os círculos iniciais C_1 e C_2 . Se o círculo C é tangente a ℓ e tem centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, o círculo C' é tangente a ℓ e tem centro $\left(\frac{r}{s}, \frac{1}{2s^2}\right)$ e $qr - ps = 1$ então, se o círculo \tilde{C} tangente a C e C' e à reta ℓ tem centro (x, y) com $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ então, se $d' = x - \frac{p}{q}$ e $d'' = \frac{r}{s} - x$, devemos ter $d' = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{y}{2}}$ e $d'' = \frac{2}{s} \sqrt{\frac{y}{2}}$, e $d' + d'' = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}$, donde $\frac{2(q+s)}{qs} \sqrt{\frac{y}{2}} = \frac{1}{qs} \Rightarrow y = \frac{1}{2(q+s)^2}$ e $d' = \frac{1}{q(q+s)} \Rightarrow x = \frac{p}{q} + d' = \frac{p(q+s)+1}{q(q+s)} = \frac{p+r}{q+s}$ (pois $ps = qr - 1$). Assim, \tilde{C} é tangente em $\left(\frac{p+r}{q+s}, 0\right)$ e tem raio $\frac{1}{2(q+s)^2}$.

Como $q(p+r) - p(q+s) = qr - ps = 1$ e $(q+s)r - (p+r)s = qr - ps = 1$ vemos que \tilde{C} satisfaz i) e ii).

Esses fatos implicam que todos os círculos criados terão centro em pontos racionais. Basta provar agora que para todo racional $\frac{p}{q} \in [0,1]$, o ponto $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ é ponto de tangência de algum dos círculos. Faremos isto por indução em q (para $q = 1$ o resultado é óbvio): basta mostrar se $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $q \geq 2$ que é possível escrever $p = p' + p''$ e $q = q' + q''$ com p', p'', q', q'' inteiros, $q', p'' \geq 0$ e $q'p'' - p'q'' = 1$.

Estas equações podem ser escritas como $q'(p-p') - p'(q-q') = 1$, ou seja, $q'p - p'q = 1$, onde $0 < q' < q$ e $0 < p' < p$. Como $\text{mdc}(p, q) = 1$ existem $x, y \in \mathbb{Z}$

com $px + qy = 1$, e teremos para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p(x + kq) + q(y - kp) = 1$. Certamente podemos escolher k de modo que $0 < x + kq < q$ (note que x não é múltiplo de q , senão $1 = px + qy$ também seria), e então tomamos $q' = x + kq$ e $p' = kp - y$ (temos $p' = \frac{pq' - 1}{q}$, mas $1 \leq q' < q$, donde $0 \leq p' < p$).

17) Dado $n \in \mathbb{N}$, uma partição π de n é uma lista ordenada $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, $r, a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{N}^*$ com $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$ e $a_1 + a_2 + \dots + a_r = n$.

Seja P_n o conjunto das partições de n . Para $\pi \in P_n$, definimos $A(\pi)$ como o número de termos iguais a 1 em π (ou seja, $A(\pi) =$

$\# \{i \in \{1, 2, \dots, r\} \mid a_i = 1\}$), e $B(\pi)$ como o número de termos distintos na partição π (ou seja, $B(\pi) = \# \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$).

Prove que $\sum_{\pi \in P_n} A(\pi) = \sum_{\pi \in P_n} B(\pi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro - RJ):

Provaremos o resultado por indução em n . Para $n = 1$ o resultado é óbvio, pois a única partição de 1 é (1). As partições $\tilde{\pi} = (a_1, \dots, a_n)$ de $n + 1$ com $a_1 = 1$ (isto é, com $A(\tilde{\pi}) > 0$) são obtidas das partições $\pi = (a_2, \dots, a_r)$ de n acrescentando um 1 na primeira posição. Esta operação acrescenta 1 ao $A(\pi)$ e acrescenta 1 ao $B(\pi)$ caso $A(\pi) = 0$, e 0 caso contrário (ou seja, caso $A(\tilde{\pi}) \geq 2$). Admitindo o resultado para n , o resultado para $n + 1$ segue então de

$$\sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}} A(\tilde{\pi}) - \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}} B(\tilde{\pi}) = \# \{ \tilde{\pi} \text{ partição de } n+1 \mid A(\tilde{\pi}) \geq 2 \} - \sum_{\substack{\tilde{\pi} \in P_{n+1} \\ A(\tilde{\pi})=0}} B(\tilde{\pi}).$$

O lado direito é igual a 0, pois, considerando

$$f = \{ \tilde{\pi} \in P_{n+1} \mid A(\tilde{\pi}) \geq 2 \} \rightarrow \{ \tilde{\pi} \in P_{n+1} \mid A(\tilde{\pi}) = 0 \}, \text{ tal que se } \tilde{\pi} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$$

então os elementos da partição $f(\tilde{\pi})$ são $A(\tilde{\pi}), a_{A(\tilde{\pi})+1}, \dots, a_r$ (somamos todos os

$A(\tilde{\pi}) \geq 2$ termos de $\tilde{\pi}$ iguais a 1), é fácil ver que f é sobrejetiva, e, dado

$\tilde{\pi} \in P_{n+1}$ com $A(\tilde{\pi}) = 0$, $\#\{\pi' \in P_{n+1} \mid A(\pi') \geq 2 \text{ e } f(\pi') = \tilde{\pi}\} = B(\tilde{\pi})$,

(escolheremos um elemento de π e o decomposmos como soma de uns) donde

$$\#\{\tilde{\pi} \in P_{n+1} \mid A(\tilde{\pi}) \geq 2\} = \sum_{\substack{\tilde{\pi} \in P_{n+1} \\ A(\tilde{\pi})=0}} B(\tilde{\pi}).$$

20) Diga se existe uma função polinomial de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} cuja imagem seja o intervalo $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro - RJ):

Considere a função $f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$

É fácil ver que $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e se $f(x) = 0$ então $x = 0$ e $xy - 1 = 0$, o

que é impossível. Dado $a > 0$, $f\left(\sqrt{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = a$, donde $Im(f) = (0, +\infty)$.

24) Na loteria de *Truchilândia*, cada bilhete tem um número de três algarismos que usa somente os algarismos 1, 2, 3, 4 (é permitido repetir os dígitos). Um bilhete é *ganhador* se coincide em pelo menos duas posições com o número sorteado.

Um apostador quer comprar vários bilhetes, de maneira que um deles ganhe com certeza, mas gastando o mínimo possível. Determinar quantos bilhetes deve comprar e quais bilhetes deve comprar.

Obs. Se o bilhete sorteado for o 423 então 123 é um bilhete ganhador, mas 243 não é.

Solução de Flávio Wagner Rodrigues (São Paulo - SP):

1. Vamos observar inicialmente que o sorteio dessa loteria admite 64 resultados possíveis.

2. Com um único bilhete o apostador tem 10 resultados favoráveis. De fato, para cada par de posições 1 e 2, 1 e 3 e 2 e 3 existem quatro bilhetes favoráveis o que nos dá um total de 12 mas, o número de seu bilhete é contado 3 vezes e portanto são apenas 10 resultados favoráveis distintos.
3. Segue-se de 1 e 2 que 6 bilhetes não são suficientes para garantir a vitória do apostador. Vamos mostrar agora que 7 bilhetes também não são suficientes. Como são quatro algarismos e 7 jogos existe pelo menos um algarismo que aparece uma única vez na primeira posição. Vamos supor que existe um único jogo que tenha o 1 na primeira posição. Esse jogo garante a vitória do jogador em 7 jogos começados com 1. Como existem 16 jogos começados por 1, a vitória nos outros 9 deve ser garantida pelos elementos que aparecem nas posições 2 e 3 dos demais jogos. Como existem apenas 6 outros jogos existirão 3 jogos começados por 1 que se forem sorteados não darão vitória ao jogador.
4. Existem vários conjuntos de oito jogos que resolvem o problema. Vamos dar dois exemplos e mostrar em seguida como esses conjuntos podem ser construídos.
5. Exemplo 1 : 124, 131, 212, 313, 342, 243, 421, 434
Exemplo 2 : 123, 111, 232, 334, 342, 244, 413, 421
Exemplo 3 : 111, 122, 212, 221, 333, 344, 434, 443

Roteiro para construir um conjunto de oito jogos que resolve o problema.

Inicialmente vamos observar que o conjunto deverá satisfazer duas condições importantes:

- 1- Cada algarismo deve aparecer em cada posição exatamente duas vezes.
 - 2- É necessário que existam jogos que contêm elementos repetidos como 11, 22, 33, 44 não importando em que posições.
-
- 1- Escolha dois jogos que tenham o 1 na primeira posição e algarismos distintos nas outras posições. Por exemplo 1 3 4 e 1 4 2. Não é difícil mostrar que dos 16 jogos que começam por 1 esses dois jogos garantem a vitória do apostador em 12. Restam 4 jogos para os quais será necessário

que a vitória seja garantida pelas posições 2 e 3 dos demais jogos. No nosso exemplo, vamos necessitar de jogos terminando em 11, 13, 21 e 23

- 2- A primeira observação acima e a conveniência de não repetir ligações nos permitem dizer que os dois jogos que faltam devem terminar por 32 e 44. A distribuição dos algarismos que devem ocupar as primeiras posições deve ser feita levando em conta as condições iniciais evitando sempre que possível a repetição de ligações. Uma possibilidade seria :

134, 142, 211, 223, 313, 321, 432, 444

- 26) Sejam as funções $f_0(x) = x^n$ e $f_i(x) = f_{i-1}(x+1) - f_{i-1}(x)$ onde x, n e i são inteiros positivos. Prove que, para todo $x, f_n(x) = n!$

Solução de Bruno Fernandes Cerqueira Leite (São Paulo - SP):

Antes de começar, é importante deduzir (pelo Binômio de Newton) que:

$$(x+1)^a - x^a = a \cdot x^{a-1} + \binom{a}{2} x^{a-2} + \dots \text{ (isto será muito usado na demonstração).}$$

Agora temos $f_0(x) = x^n$ e $f_{i+1}(x) = f_i(x+1) - f_i(x)$

$$f_1(x) = f_0(x+1) - f_0(x) = (x+1)^n - x^n = n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \dots \Rightarrow \frac{f_1(x)}{n} =$$

$x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots$, onde a_1, a_2, \dots , etc são coeficientes racionais (que não nos interessam).

$$f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x) \Rightarrow \frac{f_2(x)}{n} = \frac{f_1(x+1)}{n} - \frac{f_1(x)}{n} = [(x+1)^{n-1} + a_1(x+1)^{n-2} + \dots] -$$

$$-[x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots] = [(x+1)^{n-1} - x^{n-1}] + a_1 [(x+1)^{n-2} - x^{n-2}] + \dots \Rightarrow \frac{f_2(x)}{n} =$$

$$\left[(n-1)x^{n-2} + \binom{n-1}{2} x^{n-3} + \dots \right] + a_1 \left[(n-2)x^{n-3} + \binom{n-2}{2} x^{n-4} + \dots \right] + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{f_2(x)}{n(n-1)} = x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + \dots, \text{ onde } b_1, b_2, \dots, \text{ etc, são coeficientes}$$

racionais (cuja determinação não nos interessa).

Continuando com esses procedimentos, podemos chegar a expressões análogas para $f_3(x), f_4(x)$, etc.

A semelhança entre essas expressões nos leva a "desconfiar" que

$$\frac{f_b(x)}{A_{n,b}} = x^{n-b} + \beta_1 x^{n-b-1} + \beta_2 x^{n-b-2} + \dots, \text{ onde}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_j, j = 1, 2, \text{ etc; são coeficientes (não nos interessam)} \\ A_{n,b} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots}_{b \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-b)!} \end{array} \right.$$

Vamos provar isto por indução. Suponha que a fórmula valha para $f_1(x), \dots, f_{b-1}(x)$. Teremos:

$$f_b(x) = f_{b-1}(x+1) - f_{b-1}(x) \Rightarrow \frac{f_b(x)}{A_{n,b-1}} = \left[\frac{f_{b-1}(x+1)}{A_{n,b-1}} \right] - \left[\frac{f_{b-1}(x)}{A_{n,b-1}} \right] \text{ e por hipótese de}$$

indução,

$$\begin{aligned} \frac{f_b(x)}{A_{n,b-1}} &= [(x+1)^{n-b+1} + \alpha_1(x+1)^{n-b} + \dots] - [x^{n-b+1} + \alpha_1 x^{n-b} + \dots] = [(x+1)^{n-b+1} - x^{n-b+1}] + \\ &\alpha_1 [(x+1)^{n-b} - x^{n-b}] + \dots = \left[(n-b+1)x^{n-b} + \binom{n-b+1}{2} x^{n-b-1} + \dots \right] + \alpha_1 \left[(n-b)x^{n-b-1} + \binom{n-b}{2} x^{n-b-2} + \dots \right] \end{aligned}$$

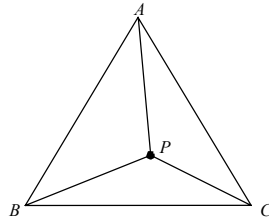
$$+ \dots \Rightarrow \frac{f_b(x)}{A_{n,b-1}} = (n-b+1)[x^{n-b} + \beta_1 x^{n-b-1} + \beta_2 x^{n-b-2} + \dots] \Rightarrow \frac{f_b(x)}{A_{n,b-1}(n-b+1)} = \frac{f_b(x)}{\frac{n!}{(n-b+1)!} \cdot (n-b+1)} =$$

$$= \frac{f_b(x)}{n!} = x^{n-b} + \beta_1 x^{n-b-1} + \beta_2 x^{n-b-2} + \dots \Rightarrow \frac{f_b(x)}{A_{n,b}} = x^{n-b} + \beta_1 x^{n-b-1} + \beta_2 x^{n-b-2} + \dots,$$

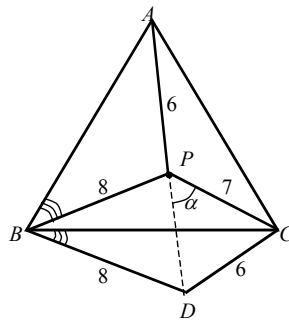
confirmando o que foi "desconfiado".

Agora vamos usar a fórmula para $\frac{f_n(x)}{A_{n,n}} = x^{n-n} = 1 \Rightarrow f_n(x) = A_{n,n} = n!$

- 27) O triângulo equilátero ABC possui um ponto interno P tal que em P chegam três segmentos de reta (PA , PB , PC) onde $PA = 6$, $PB = 8$ e $PC = 7$. Com esses dados descubra qual é a área do triângulo.



Solução de Ricardo Klein Hoffmann (Porto Alegre - RS):



1. Seja BCD o triângulo congruente ao triângulo APB onde:

$$\begin{cases} \overline{PB} = \overline{BD} = 8 \\ \overline{AP} = \overline{CD} = 6 \\ \overline{AB} = \overline{BC} = x \end{cases}$$

2. Temos que $\hat{A}BC = \hat{P}BD = 60^\circ$. Então, o ΔPBD é equilátero com $\overline{PD} = 8$.
3. Seja $\hat{C}PD = \alpha$
4. $\Delta(PDC) \rightarrow$ Lei dos cossenos

$$6^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \therefore \cos \alpha = \frac{11}{16} \text{ daqui, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

5. $\Delta(BPC) \rightarrow$ Lei dos cossenos

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha + 60^\circ) \therefore x^2 = \frac{149 + 63\sqrt{5}}{2}$$

6. Área $\Delta(ABC) = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = S$

$$\text{Então, } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{149 + 63\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\text{Portanto, a área do } \Delta(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (149 + 63\sqrt{5}).$$

28) Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Prove que n e $n + 2$ são ambos primos se e

somente se $\frac{4((n-1)! + 1) + n}{n(n+2)}$ é inteiro.

Solução de Marcelo Rufino de Oliveira (São José dos Campos - SP):

Antes de iniciar a resolução, vou enunciar e provar os seguintes Teoremas, que serão de grande utilidade:

1º Teorema (Teorema de Wilson):

“Se p é um número primo, então o número $(p-1)! + 1$ é divisível por p .”

Prova: Consideremos a congruência linear: $ax \equiv 1 \pmod{p}$ onde a é qualquer dos $p-1$ inteiros positivos da seqüência

$$1, 2, 3, \dots, p-1 \quad (1)$$

Então, o mdc $(a, p) = 1$ e é sabido que esta congruência admite uma única solução módulo p , isto é, existe um único inteiro a_1 , com $1 \leq a_1 \leq p-1$, tal que $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$

Se p é primo, temos que $a = a_1$ se e somente se $a = 1$ ou $a = p-1$.

De fato, a congruência quadrática $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ é equivalente à seguinte $(a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod{p}$ de modo que $p \mid (a-1)$ ou $p \mid (a+1)$, o que implica que:

$$a-1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ e } a=1 \text{ ou } a+1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ e } a=p-1$$

Então para cada a distinto da seqüência (1) existe somente um a_1 correspondente na seqüência (1) que satisfaz $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Omitindo os pares 1 e $p - 1$, com os $p - 3$ inteiros restantes: 2, 3, ..., $p - 3$, podemos formar

$(p - 3)/2$ pares a, a_1 , com $a \neq a_1$, e tais que $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Multiplicando todas essas $(p - 3)/2$ congruências, obtemos:

$$2.3.4 \dots (p - 3)(p - 2) \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (p - 2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\text{Multiplicando por } p - 1: (p - 1)! \equiv p - 1 \pmod{p} \Rightarrow (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

2º Teorema:

“Uma condição necessária e suficiente para que um número natural $p > 1$ seja primo é que o número $(p - 1)! + 1$ seja divisível por p .”

Prova: Suponhamos que p não seja primo. Então existe um divisor q de p tal que $1 < q < p$. O número $(p - 1)! + 1$ sendo divisível por p , também deve ser divisível por q . Desde que $q < p$, então $q \leq p - 1$, implicando que q divide algum inteiro positivo entre 2 e $p - 1$. Assim q divide $(p - 1)!$. Como q divide $(p - 1)! + 1$ então q também divide 1, que é uma contradição, pois $1 < q < p$.

1ª parte (ida)

I) Suponhamos que n e $n + 2$ são números primos.

De acordo com o Teorema de Wilson nós temos que $(n - 1)! + 1$ é divisível por n e $(n + 1)! + 1$ é divisível por $n + 2$.

Como n divide $4((n - 1)! + 1)$ e, evidentemente, n também divide n , então divide a sua soma, ou seja, $4((n - 1)! + 1) + n$ é divisível por n .

Basta analisar agora se $4((n - 1)! + 1) + n$ também é divisível por $n + 2$.

$$x = 4((n - 1)! + 1) + n = 4((n - 1)! + 1) + n + 2 \cdot (n + 1)! - 2 \cdot (n + 1)! \Rightarrow$$

$$x = 2 \cdot (n + 1)! + n + 4 - 2[(n + 1)! - 2 \cdot (n - 1)!] \Rightarrow$$

$$x = 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + [(n - 1)!n(n + 1) - 2 \cdot (n - 1)!] \Rightarrow$$

$$x = 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + (n - 1)! [n^2 + n - 2] \Rightarrow$$

$$x = 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + (n - 1)! (n + 2)(n - 1)$$

Como $n + 2$ divide tanto $2[(n + 1)! + 1]$, como $(n + 2)$ e também

$(n - 1)!(n + 2)(n - 1)$, então divide a sua soma, que é $x = 4((n - 1)! + 1) + n$.

Como n e $n + 2$ são ambos primos e dividem $4((n - 1)! + 1) + n$, então o seu produto também divide $4((n - 1)! + 1) + n$.

2ª parte (volta)

II) Suponhamos agora que para um número natural $n > 1$, o valor

$4((n - 1)! + 1) + n$ é divisível pelo produto $n(n + 2)$.

Se n for par, isto é, se $n = 2k$, onde k é um número natural, então $n - 1 \geq k$.

Isto implica que $(n - 1)!$ é divisível por k e também que $4.(n - 1)!$ é divisível por $2k$.

Consequentemente $4.(n - 1)!$ é divisível por n , e como

$4((n - 1)! + 1) + n = 4.(n - 1)! + n + 4$ é divisível por n , então 4 é divisível por n .

Como n é par então $n = 2$ ou $n = 4$.

Entretanto é fácil verificar que $4((n - 1)! + 1) + n$ não é divisível por $n(n + 2)$ caso $n = 2$ ou $n = 4$.

Assim, o fato de que $4((n - 1)! + 1) + n$ é divisível por n implica que

$(n - 1)! + 1$ é divisível por n . Pelo 2º Teorema temos que n é um número primo.

Fazendo as mesmas operações da 1ª parte da solução:

$4((n - 1)! + 1) + n = 2[(n + 1)! + 1] + (n + 2) + (n - 1)!(n + 2)(n - 1)$

Como $4((n - 1)! + 1) + n$, $n + 2$ e $(n - 1)!(n + 2)(n - 1)$ são todos termos divisíveis por $n + 2$, então $(n + 1)! + 1$ também é divisível por $n + 2$.

Pelo 2º Teorema temos que $n + 2$ também é um número primo.

Agradecemos também o envio das soluções a: Carlos Alberto da Silva Victor (Rio de Janeiro - RJ), Tertuliano Franco (Salvador - BA), Manuel João de Jesus Almeida - Rio de Janeiro - RJ) e Daniel Pessoa Martins Cunha (Fortaleza - CE). Seguimos esperando a solução do problema 29.

O prazo para recebimento das soluções do problema "Cuático" publicado na revista EUREKA! No. 5 (que concorre a prêmio!) foi prorrogado até dia 15 de fevereiro.

Problema "Cuático"

Prove que para qualquer conjunto de inteiros positivos A e para todo inteiro positivo k existe um conjunto infinito de números primos S tal que o produto de k elementos distintos de S está sempre em A ou o produto de k elementos distintos de S nunca pertence a A .

Errata:

No primeiro teste de seleção para a 40ª. IMO e a 14ª. OIM, publicado na EUREKA! No. 5, pág 50, no problema 4, onde diz:

"Por exemplo, $\min\{3, 4\} = 4...$ " deve dizer "Por exemplo, $\min\{3, 4\} = 3...$ "

PROBLEMAS PROPOSTOS

☒ Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

30) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as condições:

$$(i) f(-x) = -f(x), \quad (ii) f(x+1) = f(x) + 1, \quad (iii) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ para } x \neq 0.$$

31) Seja x_1, x_2, x_3, \dots uma seqüência de números reais não negativos satisfazendo

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \text{ para } n = 3, 4, 5, \dots \text{ Estabeleça condições necessárias e}$$

suficientes em x_1 e x_2 para x_n ser inteiro para infinitos valores de n .

32) a) Prove que todo número inteiro não nulo m admite uma única representação

da forma $m = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot 3^k$, onde n é um inteiro positivo e $\sigma_k \in \{-1, 0, 1\}$ para todo k , com $\sigma_{n-1} \neq 0$.

b) Dado um conjunto de $\frac{3^n + 1}{2}$ pontos $V = \{P_0, P_1, \dots, P_{\frac{3^n - 1}{2}}\}$, escrevemos em

cada aresta que une dois desses pontos P_i e P_j ($i \neq j$) um número pertencente a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ da seguinte forma: escreveremos

$$|i - j| = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot 3^k, \text{ com } \sigma_k \in \{-1, 0, 1\}, \forall k, \text{ e associamos à aresta } P_i P_j \text{ o}$$

número $m = \min\{k \geq 0 \mid \sigma_k = 1\}$.

Prove que não existe nenhum triângulo cujos vértices pertençam a V com o mesmo número escrito em seus três lados.

33) Na parede interna de um vaso cilíndrico de cristal existe uma gota de mel num ponto B situado a três centímetros do seu bordo superior. Na parede externa, num ponto A diametralmente oposto ao da gota, está uma formiga. Sabendo que a altura do vaso é de 20cm e o seu diâmetro é 10 cm. Indicar o caminho mais curto para que a formiga atinja a gota de mel.

34) ABC é um triângulo, tal que $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.

Por um ponto interior P deste triângulo, são traçadas paralelas aos seus lados.

Sabe-se que as intersecções, da paralela ao lado de medida a , com os lados deste triângulo, determinam um segmento de medida a' .

Analogamente, as paralelas aos lados de medidas b e c , determinam com os lados do triângulo, segmentos de medidas b' e c' respectivamente.

Nestas condições demonstre que $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2$.

- 35) Sabendo que num triângulo ABC a altura relativa ao vértice A mede 12cm. e a altura relativa ao vértice B mede 20cm., determine todos os valores possíveis para a altura relativa ao vértice C .

Problemas 30 e 31 propostos por Marcelo Rufino de Oliveira (São José dos Campos - SP), problema 33 proposto por Gleydson Chaves Ricarte (Fortaleza - CE), problema 34 proposto por Paulo Jacob (Lista de discussão de problemas), problema 35 proposto por Carlos Alexandre Gomes da Silva (Natal - RN).



Você sabia...

Que ninguém sabe se existem infinitos primos p tais que $p + 2$ também seja primo (mas todo mundo acredita nisso)? Um par de primos $p, p + 2$ é chamado um par de primos gêmeos. Os maiores primos gêmeos conhecidos são $361700055 \cdot 2^{39020} \pm 1$, que têm 11755 dígitos e foram descobertos este ano por Henri Lifchitz. Também não se sabe se todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como soma de dois primos (esta é a conjectura de Golbach).

ASSINATURA DA REVISTA EUREKA! 2000

Se você deseja seguir recebendo na sua casa a revista EUREKA!, faça o seu pedido escrevendo para: **Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática**, Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - Rio de Janeiro, RJ - CEP: 22460-320. Você pode fazer uma assinatura anual o que dará direito a receber as publicações do ano 2000 (mínimo 3 exemplares) por um valor de R\$10,00. Para isso, faça um depósito no Banco do Brasil - Agência 0598-3 Conta N°52208-2 em nome do professor Eduardo Wagner. Envie-nos a fotocopia da ficha do verso preenchida e uma cópia do recibo do depósito. Nós remeteremos a(s) revista(s) pelo correio. Pedidos podem ser feitos também por e-mail e comprovantes de depósito poderão ser enviados pelo fax.

Se tiver qualquer dúvida entre em contato conosco.

Telefone: 21-5295077 / Fax: 21-5295023

e-mail: obm@impa.br

Home-Page: <http://www.obm.org.br/>

LISTA DE DISCUSSÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA OLÍMPICA

Está aberta uma lista de discussão de problemas de Matemática Olímpica.

A lista é aberta à todos.

O endereço da lista é:

Obm-l@mat.puc-rio.br

Para assinar, envie uma mensagem para:

Majordomo@mat.puc-rio.br

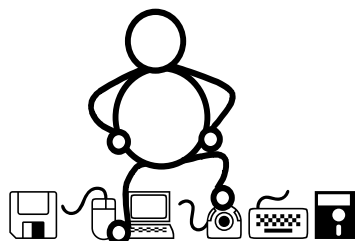
Com texto

Subscribe obm-l

Quem assim proceder deve receber um pedido de confirmação auto-explicativo (automaticamente gerado pelo majordomo em inglês).

Em caso de problemas, escreva para o Professor Nicolau Saldanha (administrador desta lista): e-mail: **nicolau@mat.puc-rio.br**

Desta lista estão participando muitos alunos e professores e nela são discutidos problemas e aspectos teóricos de matemática. Trata-se de um meio informal e eficiente de preparação para as olimpíadas.



ASSINATURA 2000 DA REVISTA EUREKA!

Atenção! Leia atentamente as instruções da página anterior.
Por favor preencha esta ficha com letra de forma.

Nome:	
Endereço:	
Bairro:	
Cidade:	Estado:
Cep:	
Telefone: ()	
Fax: ()	
e-mail:	

Números atrasados podem ser comprados utilizando a mesma forma de pagamento da assinatura, sendo os preços:

- ◆ Números 1, 2 e 3 R\$10,00
- ◆ Números 4, 5 e 6 R\$10,00
- ◆ Números por separado R\$4,00 (cada)

Você sabia... que ninguém sabe se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k(n) = 1$, onde $a_1(n) = n$ e

$$a_{k+1}(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n+1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad ?$$

(Isto é conhecido como o problema $3x+1$, e a resposta é afirmativa para todo $n \leq 2^{40}$)



COORDENADORES REGIONAIS

Amarisio da Silva Araújo	(UFV)	Viçosa - MG
Alberto Hassen Raad	(UFJF)	Juiz de Fora - MG
Antônio C. Rodrigues Monteiro	(UFPE)	Recife - PE
Angela Camargo	(Centro de Educação de Adultos - CEA)	Blumenau - SC
Benedito T. Vasconcelos Freire	(UFRN)	Natal - RN
Claudio Arconcher	(Col. Leonardo da Vinci)	Jundiá - SP
Clauss Haetinger	(UNIVATES)	Lajeado - RS
Crescêncio das Neves	(UFAM)	Manaus-AM
Élio Mega	(Col. ETAPA)	São Paulo - SP
Enzo Marcom Takara	(Col. Singular)	Santo André - SP
Flávia Jerônimo Barbosa	(UFPB Campus I)	João Pessoa - PB
Florêncio F. Guimarães Filho	(UFES)	Vitória - ES
Francisco Dutenhefner	(UFMG)	Belo Horizonte - MG
Gisele de A. Prateado Gusmão	(UFGO)	Goiânia - GO
Ivanilde H. Fernandes Saad	(U. Católica Dom Bosco)	Campo Grande - MS
João Benício de Melo Neto	(UFPI)	Teresina - PI
João F. Melo Libonati	(Grupo Educ. IDEAL)	Belém - PA
Jorge Ferreira	(UEM)	Maringá - PR
José Carlos Pinto Leivas	(UFRG)	Rio Grande - RS
José Cloves Saraiva	(UFMA)	São Luis - MA
José Gaspar Ruas Filho	(ICMC-USP)	São Carlos - SP
José Luis Rosas Pinho	(UFSC)	Florianópolis - SC
José Paulo Carneiro	(Univ. Santa Úrsula)	Rio de Janeiro - RJ
José Vieira Alves	(UFPB)	Campina Grande - PB
Leonardo Matteo D'orio	(Sistema Titular de Ensino)	Belém - PA
Lício Hernandes Bezerra	(UFSC)	Florianópolis - SC
Luzinalva M. de Amorim	(UFBA)	Salvador - BA
Marcondes Cavalcante França	(UF Ceará)	Fortaleza - CE
Pablo Rodrigo Ganassim	(L. Albert Einstein)	Piracicaba - SP
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	(Esc. Tec. Everardo Passos)	SJ dos Campos - SP
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	(INPE)	SJ dos Campos - SP
Ricardo Amorim	(Centro Educ. Logos)	Nova Iguaçu - RJ
Roberto Vizeu Barros	(Colégio ACAE)	Volta Redonda - RJ
Sergio Claudio Ramos	(IM-UFRGS)	Porto Alegre - RS
Seme Gebara Neto	(UFMG)	Belo Horizonte - MG
Tadeu Ferreira Gomes	(U. do Estado da Bahia)	Juazeiro - BA
Tomás Menéndez Rodrigues	(U. Federal de Rondonia)	Porto Velho - RO
Valdenberg Araújo da Silva	(U. Federal de Sergipe)	São Cristovão - SE
Wagner Pereira Lopes	(Esc. Tec. Fed. de Goiás)	Jataí - GO
Waldemar M. Canalli	(P.M. S. João de Meriti)	S. João de Meriti - RJ