Expressões de sequencias

Semana Olímpica/2015

Prof. Armando

01 de fevereiro de 2015

---

1 Introdução

Um assunto que cai com frequência em olimpíada são as sequências. Sequências são listas ordenadas de números (que, no contexto de sequências, são chamados de termos). Por exemplo, temos que:

- a_1 é o primeiro termo da sequência;
- a_2 é o segundo termo da sequência;
- e assim sucessivamente, sendo que a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Alguns exemplos famosos de sequência:

- **PA:** $a_{k+1} = a_k + r$, sendo r a razão da PA (Progressão Aritmética);
- **PG:** $a_{k+1} = a_k \cdot q$, sendo q a razão da PG (Progressão Geométrica);
- **Fibonacci:** $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, sendo $F_1 = F_2 = 1$;

Muitas vezes, estamos interessados no termo geral da sequência. Nesses casos, o objetivo é saber um termo qualquer de uma sequência, sabendo apenas a posição dele e outros valores constantes como, por exemplo, termos iniciais. Em outras palavras, o objetivo é encontrar uma equação que expresse o valor de a_n em função da posição n e outras constantes definidas como, por exemplo, termos iniciais. Para treinar um pouco, tentemos resolver o exercício a seguir:

1.1 Questão inicial

Problema 1 Encontre os termos gerais das seguintes sequências:

a) $a_{k+1} = a_k + 5$, sendo $a_1 = 4$ (Progressão Aritmética de termo inicial igual a 4 e razão igual a 5);

b) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, sendo a_n a sequência do item anterior;

c) $b_{k+1} = b_k \cdot 3$, sendo $b_1 = 2$ (Progressão Geométrica de termo inicial igual a 2 e razão igual a 3);

d) $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, sendo b_n a sequência do item anterior;

e) $U_n = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots$ (Progressão Geométrica infinita com razão entre 0 e 1).

Podemos generalizar os resultados do exercício anterior, assim como encontrar termos gerais de outros tipos de sequências. Vejamos alguns exemplos famosos de termos gerais:

- **PA:** $a_{k+1} = a_1 + (n-1) \cdot r = a_0 + n \cdot r$, sendo r a razão da PA;
- **PG:** $a_{k+1} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_0 \cdot q^n$, sendo q a razão da PG;
- **Fibonacci:** $F_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;

Nesse material, veremos algumas ideias para encontrar o termo geral ou, ao menos, encontrar alguma propriedade de tal termo. Para isso, vejamos algumas dicas:

1. Encontre alguns termos iniciais e procure algum padrão. Daí, tente provar o padrão encontrado por indução;

2. Quando você precisa encontrar alguma propriedade sobre o termo geral da sequência, procure algum padrão. Daí, tente provar o padrão encontrado por indução;

3. Nos casos de "sequências não simples", procure achar alguma outra sequência que possa reescrever a mesma expressão de uma forma mais simplificada que permita o uso de alguma outra técnica como, por exemplo, "soma/produto" telescópico;

4. Procure ver se a sequência é crescente/decrescente/não-crescente/não-decrescente;

5. Nos casos de sequências lineares, lembre-se da equação característica;
6. Procure avaliar se todos os elementos da sequência são distintos;
7. Procure ver se a sequência é periódica.

Antes de começar as questões, mostraremos exemplos de como aplicar algumas das dicas acima.

1.2 Aplicação de algumas dicas iniciais

- (Aplicação da dica 3) Uma sequência do tipo $x_{n+1} = A \cdot x_n + B$ onde A e B são constantes pode ser resolvida da seguinte forma:

Caso 1: Se $A = 1$, então a sequência é uma PA e o termo geral é bem conhecido:

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot B$$

Caso 2: Se $A \neq 1$, então pensemos em substituir por uma sequência y_n tal que:

$$x_n = y_n + t \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Onde procuraremos um t esperto. Fazendo as contas, teremos que: $\boxed{t = \dfrac{B}{1-A}}$ é uma ótima ideia, pois para esse t específico, y_n se tornará uma PG.

- (Aplicação da dica 5) <u>Recorrência linear homogênea:</u> Sequências do tipo

$$x_n = k_1 \cdot x_{n-1} + \cdots + k_t \cdot x_{n-t}$$

onde $k_1, k_2, \cdots, k_t$ são constantes são chamadas de <u>recorrências lineares homogêneas.</u> Existe uma fórmula generalizada para encontrar termos gerais desse tipo de sequência, mas esse assunto foge ao tema desse material. Vamos mostrar apenas como se resolve, sem provar, como se resolve uma <u>recorrência linear homogênea de grau 2</u>, isto é, sequências do tipo:

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + B \cdot x_{n-2}$$

onde A e B são constantes. Para isso, considere a equação:

$$x^2 = Ax + B$$

A equação acima é chamada de equação característica. Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica. Daí, temos dois casos:

Caso 1: Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então existem k_1 e k_2 constantes tais que:

$$x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Substituindo a fórmula acima para $n = 1$ e $n = 2$ (ou $n = 0$), teremos um sistema com duas equações e duas variáveis e, assim, podemos achar os valores de k_1 e k_2.

Caso 2: Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então existem k_1 e k_2 constantes tais que:

$$x_n = k_1\lambda_1^n + k_2 \cdot n\lambda_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Analogamente ao caso anterior, substituindo a fórmula acima para $n = 1$ e $n = 2$ (ou $n = 0$), teremos um sistema com duas equações e duas variáveis e, assim, podemos achar os valores de k_1 e k_2.

É possível provar as fórmulas acima com algum algebrismo. Porém, para não "desfocar", deixemos essa demonstração para outro momento. Para assimilar melhor, vejamos uma questão resolvida:

1.3 Segunda questão inicial

Problema 2 Encontre o termo geral da famosa sequência de Fibonacci definida por:

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Solução:

1. equação característica:
$$x^2 = x + 1$$

2. raizes da equação característica:
$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3. termo geral:
$$F_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n = k_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4. casos iniciais:

$$F_1 = k_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + k_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$F_2 = k_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + k_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

5. solução do item anterior:

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

6. resposta final:

$$\boxed{F_n = F_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

Agora, é hora de praticar!

2 Questões

Problema 3 Prove as seguintes fórmulas da sequência de Fibonacci:

a) $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

b) $F_0 - F_1 + F_2 - \cdots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$;

c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$;

d) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$;

e) $F_{m+n+1} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n$.

Obs.: Na sequência de Fibonacci, temos que: $F_0 = 0$.

Problema 4 *(Itália/1996)* Dado o alfabeto com três letras a, b e c encontre o número de palavras com n letras contendo um número par de a's.

Problema 5 *(Alemanha/2001)* Seja uma sequência $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in 1, 2, \cdots, n$ tal que:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{(a_{n+1} + a_n)}$$

Prove que tal sequência é única e encontre uma fórmula para a recorrência definida por esta sequência.

Problema 6 *(Turquia/1998)* Seja a_n uma sequência de números reais definida por:

$$a_1 = t$$
$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n \cdot (1 - a_n), \quad n \geqslant 1$$

Para quantos valores distintos de t temos $a_{1998} = 0$?

Problema 7 *(Sérvia/2011)* Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Seja $a_0, \cdots, a_n$ uma sequência de reais positivos tais que:

$$(a_{k-1} + a_k) \cdot (a_k + a_{k+1}) = (a_{k-1} - a_{k+1})$$

para todo $k = 1, 2, \cdots, (n-1)$. Prove que $a_n < \frac{1}{n-1}$.

Problema 8 *(Irlanda/1999)* Mostre que existe um número positivo na sequência de Fibonacci que é divisível por 1000.

Problema 9 *(Seletiva Fortaleza - Rioplatense/2012)* Mostre que se p é um divisor primo de $L_{2n} - 2$, entãop p é um divisor primo de $L_{2n+1} - 1$.
Obs.: L_k é a sequencia de Lucas: $L_0 = 2$; $L_1 = 1$ e, para $k \geqslant 1$: $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$.

Problema 10 *(Bulgária/2012)* A sequência $a_1, a_2, \cdots$ é definida pela regra:

$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot t(n), \forall n \geqslant 1$$

sendo $t(n)$ o número de divisores positivos distintos de n. É possível que dois termos consecutivos da sequência sejam quadrados de números naturais?

Problema 11 Considere a sequência:

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} \text{ para } n \geqslant 0$$

Determine o valor de a_n.

Problema 12 *(Espanha/2012)* Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é definida pela recorrência:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 5$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}$$

Prove que todos os termos da sequência são inteiros e determine o valor de a_n.

Problema 13 *(Lista Cone Sul/2014)* Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2011$$
$$x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n = 0, 1, \cdots$$

Prove que $\dfrac{x_{2012} + 1}{2012}$ é um quadrado perfeito.

Problema 14 *(Lista Cone Sul/2014)* Seja a_n uma sequência de inteiros tais que:

$$(n-1) \cdot a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n - 2 \cdot (n-1), \quad \forall n \geqslant 1$$

Sabendo que $2016 | a_{2015}$, encontre o menor valor de $n \geqslant 2$ tal que $2016 | a_n$.

Problema 15 *(Teste Cone Sul/2013)* Uma sequência de números reais a_1, a_2, ..., a_n, ... é tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 9$ e $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$ para todos os inteiros positivos n. Prove que para cada inteiro positivo n o número a_n é um quadrado de um número inteiro.

Problema 16 *(Teste Cone Sul/2013)* Seja $x_1 = 1$ e para todo inteiro $n \geqslant 1$ seja x_n definida por:

$$x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$$

onde $\lfloor n \rfloor$ denota parte inteira de n. Encontre o valor de x_{2013}.

Problema 17 *(IMO - Shortlist/2006)* Uma sequência de números reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ é definida da seguinte forma:

$$a_0 \text{ é um número real qualquer;}$$
$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \cdot \{a_n\} \quad \text{para } n \geqslant 0$$

Prove que $a_n = a_{n+2}$ para algum n.

Problema 18 *(Rússia/2008)* As sequências a_n e b_n são definidas da seguinte forma:

$$a_1 = 1 \text{ , } b_1 = 2$$
$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n} \text{ , } b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n} \text{ para } n \geqslant 1$$

Prove que $a_{2008} < 5$.

Problema 19 *(Ibero/2002)* A sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é definida como:

$$a_1 = 56$$
$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n} \text{ , para cada} n \geqslant 1$$

Demonstre que existe um inteiro k, $1 \leqslant k \leqslant 2002$, tal que $a_k < 0$.

Problema 20 *(Ibero/2010)* Determine se existe inteiros positivos a, b tais que todos os termos da sequência x_n definidos por:

$$x_1 = 2010 \quad x_2 = 2011$$
$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}$$

são inteiros.