Funções Contínuas
Semana Olímpica 2015

Samuel Feitosa

1 Definição e Propriedades Básicas

Definição 1. Dizemos que $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|a - x| < \delta$ impliquem que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Teorema 1. Para que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que $\lim f(x_n) = f(a)$ para toda sequência de números $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

Problema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente, i.e., se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Suponha que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e que $f(1) = 1$. Quanto vale $f(\pi)$?

Problema 2. Mostre que não existe uma função contínua que transforme todo número racional em um irracional e vice-versa.

Solução Suponha que existe tal função e seja $\{x_1, x_2, \dots\}$ uma enumeração dos números racionais. Defina $F_n = f^{-1}(\{x_n\})$. Assim,

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} F_n.$$

Como f é contínua, cada F_n é fechado. Além disso, como cada um desses conjuntos é constituido apenas por números irracionais, tais conjuntos possuem interior vazio. O conjunto dos números racionais também é uma união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio - basta considerar o conjunto unitário constituído por cada racional. Sendo assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é uma união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio. Isso contradiz o Teorema de Baire pois $\mathbb{R}$ possui interior não vazio.

Problema 3. Sabemos que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada. Prove a recíproca desse fato: se $K \subset \mathbb{R}$ é tal que toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada, então K é compacto.

Problema 4. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x^2$ não é uniformemente contínua.

Solução: Dado $\delta > 0$, tome $n > \dfrac{\pi}{16\delta^2}$ e $x = \sqrt{\pi n}$ e $y = \sqrt{\pi n + \dfrac{\pi}{2}}$. Então $|\sin x^2 - \sin y^2| = 1$ e

$$\begin{aligned}
|x - y| &= \sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{\pi n} \\
&= \frac{\pi/2}{\sqrt{\pi n + \pi/2} + \sqrt{\pi n}} \\
&< \frac{\pi}{4\sqrt{\pi n}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}} \\
&< \delta
\end{aligned}$$

Assim, para $\epsilon = 1$, a continuidade uniforme não é satisfeita.

Problema 5. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona, então o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é enumerável.

Problema 6. Mostre que o conjuntos dos pontos de continuidade de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não pode ser um conjunto enumerável denso em $\mathbb{R}$.

Solução Suponha que o conjunto dos pontos de continuidade é enumerável, digamos $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Seja $n_1 = 1$. Como f é contínua em x_1, existe um intervalo fechado I_{n_1} tal que:

$$x \in I_{n_1} \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \frac{1}{n_1}.$$

Suponha que já tenhamos definimos os intervalos I_{n_k} para os inteiros $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}$ satisfazendo:

$$I_{n_k} \subset I_{n_{k-1}}$$

e

$$\{x_1, \dots, x_{n_k}\} \cap I_{n_k} = \{x_{n_k}\} \;\; \forall k \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Como X é denso, existe $x_{n_{k+1}} \in X \cap I_{n_k}$. Usando a continuidade neste ponto, existe um intervalo fechado $I_{n_{k+1}} \subset I_{n_k}$ satisfazendo:

$$x \in I_{n_{k+1}} \Rightarrow |f(x) - f(x_{n_{k+1}})| < \frac{1}{n_{k+1}}$$

e

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n_{k+1}-1}\} \not\subset I_{n_{k+1}}.$$

Claramente devemos ter $n_{k+1} > n_k$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $y \in \bigcap I_n$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, como a sequência (n_k) é ilimitada, existe n_k tal que $\frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, se $z \in I_{n_k}$, temos:

$$\begin{aligned}|f(y) - f(z)| &\leq |f(y) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Problema 7. Dê exemplo de uma função estritamente crescente definida em $\mathbb{R}$ e descontínua apenas nos números racionais.
Solução Enumere os racionais $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e defina

$$f(x) = x + \sum_{i:x_i \leq x} \frac{1}{2^i}.$$

Problema 8. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x^2$ não é periódica.
Solução Se $f(x)$ é periódica de período T, como $f_{|[0,T]}$ é uniformemente contínua, seguirá que f é uniformemente contínua. Entretanto, isso não é possível como você já deve ter visto anteriormente.

Problema 9. Defina uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.
Solução Defina f por $f(x) = x + 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = x \in \mathbb{Q}^c$.

Problema 10. Prove que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e, para todo $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2 O Teorema do Valor Intermediário

Problema 11. Verdadeiro ou falso: $\mathbb{R}$ pode ser a imagem contínua de $[0, 1)$?

Problema 12. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $f : K \to K$ uma função contínua, tal que $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$, para todos $x, y \in K$. Prove que f ou $f \circ f$ tem um ponto fixo, e dê um exemplo em que f não tem ponto fixo.

Nota: Um ponto fixo de uma função g é um ponto p tal que $g(p) = p$.

Problema 13. Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) + f(x^2) = 0 \ \ , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 14. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(0) = f(1)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que existe x tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Problema 15. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $F(x) \cdot F(F(x)) = 1$ para todo x real. Sabendo que $F(1000) = 999$, encontre $F(500)$.

Problema 16. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua tal que $f \circ f = f$. Defina $E_f = \{x \in [0, 1]; f(x) = x\}$.

i) Prove que $E_f \neq \emptyset$.

ii) Mostre que E_f é um intervalo.

3 O Teorema de Weierstrass

Problema 17. Mostre que se toda função contínua definida em X é limitada, então X é compacto.
Solução A restrição da função identidade ao conjunto X é uma função contínua que será ilimitada caso X não o seja. Suponha que existe $x_0 \in \overline{X} - X$. A restrição da função $\frac{1}{x - x_0}$ ao conjunto X é contínua mas se torna ilimitada numa vizinhança de x_0. Logo, X é fechado e limitado, ou seja, compacto.

Problema 18. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se semicontínua superiormente no ponto $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$, tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \epsilon$. Diz-se que f é semicontínua superiormente quando ela o é em todos os pontos de X. Mostre que:

1. Para que $f : X \to \mathbb{R}$ seja semicontínua superiormente no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que $\limsup_{x\to a} f(x) \leq f(a)$. Equivalementemente: para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ que seja $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(a)$.

2. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda função semicontínua superiormente definida em X é limitada superiormente e atinge seu valor máximo num ponto de X.

Problema 19. (O Retorno) Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x^2$ não é uniformemente contínua.

4 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Teorema 2. (Brouwer) Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ o disco unitário fechado de $\mathbb{R}^2$. Prove que toda função contínua $f : D \to D$ possui um ponto fixo.

Problema 20. (Extraído da Revista Matemática Universitária nº 29 - 2000) Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ o disco unitário fechado de $\mathbb{R}^2$ e $F \subset D$ um subconjunto finito não vazio. Prove que existe $F : D\backslash F \to D\backslash F$ contínua tal que $f(x, y) \neq (x, y), \forall(x, y) \in D\backslash F$?

5 O Teorema de Sharkovskii

Teorema 3. (Li e Yorke, 1975) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e que existe um ponto a tal que ou

i) $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2a$; ou

ii) $f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$.

Então f possui pontos fixos de todos os períodos.

A ordem de Sharkovskii, indicada pelo símbolo $\triangleright$ ordena os inteiros positivos da seguinte forma: se $a = 2^i(2k + 1)$ e $b = 2^j(2r + 1)$, então $a \triangleright b$ se $i < j$ ou se $i = j$, mas $k < r$.

Teorema 4. (Sharkovskii, 1964) Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua do intervalo I na reta real. Suponha que f possui um ponto de período n e que $n \triangleright k$. então f possui também um ponto de período k.

6 MISCELÂNIA

Problema 21. Determine se exite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $f(f(x) = -x$.

Problema 22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. É verdade que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$?[1]
Dica: Use o Teorema de Darboux.

Proposição 1. (Peano) Existe uma função contínua sobrejetiva $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

Problema 23. (Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária - 2000) Em um plano se move de qualquer maneira um ponto (um porco) com velocidade não superior a $1km/h$, descrevendo uma curva contínua $\lambda[0,1] \to \mathbb{R}^2$, onde $[0,1]$ é um intervalo de tempo de um hora. Sabe-se que o porco se encontra inicialmente em um quadrado de lado de $8km$. No centro deste quadrado se encontra um demônio da Tasmânia cego que não pode saber a posição do porco, porém pode mover-se com qualquer velocidade. Encontrar um curva contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (o caminho percorrido pelo demônio da Tasmânia) tal que em algum momento de tempo $t \in [0,1]$ se obtém a igualdade $\lambda(t) = \gamma(t)$ isto é, o demônio da Tasmânia pega o porco independente do caminho que este último escolha.

[1] Existe uma exemplo de uma função derivável não constante cuja derivada nos racionais é nula