XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Cada questão vale **4 pontos** se, e somente se, para cada uma o resultado escrito pelo aluno coincidir com o gabarito abaixo. Cada questão vale 0 ou 4, isto é, não tem notas parciais. A nota máxima para esta parte é 20.

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	20	30 ou –30 ou ±30	32	07	00

01. Os números da coluna do meio podem ser dados por: $1 + 2 + 4 + 6 + 8 +...+ 2n = n^2 + n + 1$. Dessa forma o número do topo é: $44^2 + 44 + 1 = 1981$. Como 1981 está no 45° andar, e 2006 –1981 = 25, 2006 deve estar no 20° andar.

02. Podemos representar os três inteiros consecutivos por $n-1,\ n$ e $n+1$. Temos

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=302 \Leftrightarrow n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1=302 \Leftrightarrow 3n^2+2=302$$

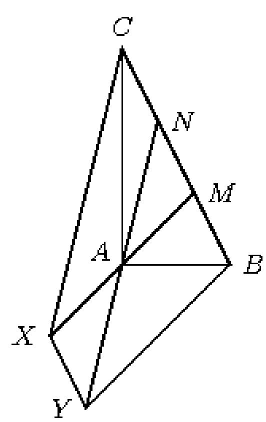
$$\Leftrightarrow 3n^2=300 \Leftrightarrow n^2=100 \Leftrightarrow n=-10 \text{ ou } n=10$$

Portanto, os três inteiros consecutivos são $-11,-10$ e -9 ou $9,10$ e 11.

Se admitirmos que estamos falando de inteiros positivos, a resposta é $9+10+11=30$.
Rigorosamente falando a resposta deveria ser: se os inteiros são positivos, então a sua soma é 30 e se os inteiros são negativos, então sua soma é –30.

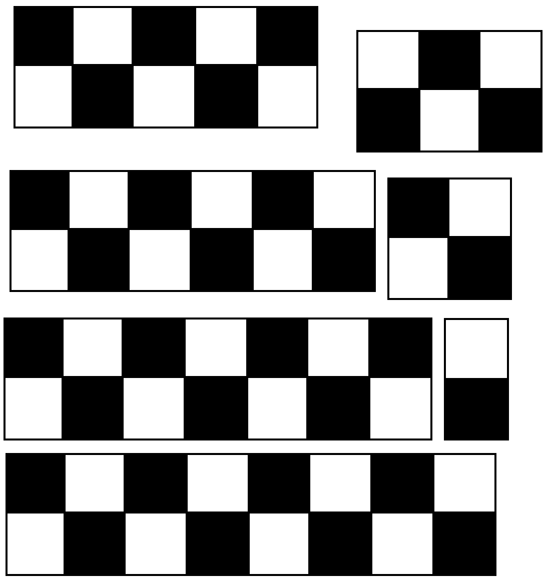
Pontuação: 4 pontos para 30 ou para – 30 ou para $\pm$ 30.

03.



Observe que os triângulos *AXY* e *ANM* são congruentes, e <*YXA* = <*AMN*. Assim, *XY* || *MN* e como *XY* = *MN* = *MC* = *NB*, segue que os quadriláteros *XYCM* e *XYNB* são paralelogramos, como *A* é ponto médio de *XM* e *NY* temos que [*AYC*] = [*BAX*] = (2/3).12 = 8. Logo, [*XYCB*] = (8/3).12 = 32.

04. Cada retângulo da decomposição possui um número par de casas, pois possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas. Veja que a maior quantidade de números pares distintos tais que a soma não supera 64 é 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56, pois 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72, ou seja, a soma de 8 números pares distintos é sempre maior que 64. Portanto, a decomposição pode ter no máximo 7 retângulos. Abaixo uma decomposição com 7 retângulos.



05. Fazendo as primeiras transformações, obtemos a seguinte seqüência:
$(1, 1, 1) \to (1, 1, 0) \to (1, 0, 1) \to (0, 2, -1) \to (0, -3, 3) \to (0, 6, -6) \to ...$
Primeiramente, vemos que a partir da quarta terna, o primeiro vai ser sempre igual a 0 (zero). Então, a partir desta terna, as transformações são do tipo: $(0, b, c) \to (0, -b + c, b - c)$. Logo, a partir da quarta terna ordenada da seqüência, a soma dos termos de todas as ternas será igual a $0 - b + c + b - c = 0$.
Logo, a soma dos três termos da terna que ocupará a 2006ª posição nesta seqüência é igual a 0 (zero).

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

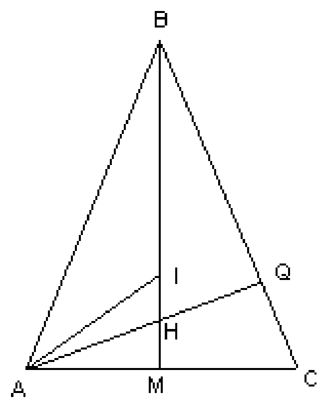
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
Vamos usar a notação:
S_par = soma de todas as casas de numeração par;
S_ímpar = soma de todas as casas de numeração ímpar.

a) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64. Como a diferença entre as somas é par e *S_ímpar* > *S_par*, há a necessidade de retirar pelo menos duas casas do lado ímpar como, por exemplo, as casas de numeração 7 e 1. Aí, teremos *S_par* = *S_ímpar* = 56. Assim, o prefeito deve derrubar pelo menos 2 casas.
b) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 +16 = 72 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +15 = 64. Como a diferença entre as somas é par e *S_par* > *S_ímpar*, pode-se retirar apenas uma casa do lado par: a casa de numeração 8.
Aí, teremos *S_par* = *S_ímpar* = 64. Assim, o prefeito deve derrubar 1 casa.

c) Para este caso, temos: *S_par* = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2006 e *S_ímpar* = 1 + 3 + 5 + ... + 2005. Assim, temos *S_par* – *S_ímpar* = (2 – 1) + (4 – 3) + ... + (2006 – 2005) = 1003. Como 1003 é ímpar, uma única casa não é suficiente, mas retirar as casas de numeração 1006 e 3 basta para que *S_par* = *S_ímpar*. Assim, o número mínimo de casas que o prefeito deve derrubar é 2 casas.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
• a) Calculou *S_par* e *S_ímpar*: **[2 pontos]**
Percebeu que deve retirar duas casas ímpares: **[+1 ponto]**
• b) Calculou *S_par* e *S_ímpar*: **[2 pontos]**
Percebeu que deve retirar uma casa par: **[+1 ponto]**
• c) Calculou a diferença *S_par* – *S_ímpar*: **[2 pontos]**
Percebeu que deve retirar duas casas: **[+2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Como o triângulo é isósceles concluímos que, $\angle CBM = \angle ABM$ e $\angle ACB = 90^o - \alpha$, com isso, $\angle CAQ = \alpha$, pois *AQ* é uma altura. Como *AI* é bissetriz, então $\angle CAI = \angle IAB = 2\alpha$. Finalmente no Δ *AMB*: $\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 18^o$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
• Perceber que $\angle CBM = \angle ABM$ e $\angle ACB = 90^o - \alpha$: **[2pontos]**
• Perceber que $\angle CAQ = \alpha$: **[2 pontos]**
• Perceber que $\angle CAI = \angle IAB = 2\alpha$: **[2 pontos]**
• Concluir o problema: **[4 pontos]**
• Apresentar alguma outra solução correta: **[10 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) Subtraindo as duas equações dadas temos $a^2 - b^2 = 6(b-a)$ ou seja $(a-b)(a+b+6) = 0$. Como $a \neq b$, temos $a + b = -6$.

b) Da parte a), elevando ao quadrado, $a^2 + b^2 + 2ab = 36$. Mas, somando as equações dadas, temos $a^2 + b^2 = 6(a+b) + 10ab = -36 + 10ab$. Portanto, $-36 + 2ab + 10ab = 36$ o que dá $ab = 6$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Se aluno tiver a idéia de somar e (ou) subtrair as equações, mas não chegar ao resultado: **[1 ponto]**
- A resolução do item (*a*) vale **[4 pontos]**;
- A resolução do item (*b*) vale **[6 pontos]**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Quando trocamos um inteiro positivo pela soma de seus algarismos, não alteramos o resto da divisão por 9. Isto é explicado pela decomposição do inteiro na forma:

$abcd = 1000a + 100b + 10c + d = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d$

Daí, temos que:

$abcd - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c)$

Logo, $abcd$ e $a + b + c + d$ deixam o mesmo resto na divisão por 9.

Como todos os números que restaram no quadro estão entre 0 e 9, inclusive, todos os números 1 restantes no quadro são originados a partir de números que deixam resto 1 na divisão por 9 (1, 10, 19, 28, 37, ..., 1999). Da mesma forma, todos os números 2 restantes no quadro são originados a partir de números que deixam resto 2 na divisão por 9 (2, 11, 20, 29, 38, ..., 2000). Comparando, vemos que cada um dos números 1 e 2 aparece 223 vezes no quadro. Portanto, ambos os números 1 e 2 aparecem o mesmo número de vezes.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Se o aluno perceber que quando trocamos um inteiro positivo pela soma de seus algarismos, não se altera o resto da divisão por 9: **[7 pontos];**
- Concluir o problema: **[3 pontos].**
- Se o aluno perceber que quando trocamos um inteiro positivo pela soma de seus algarismos, não se altera o resto da divisão por 9 e errar ao contar a quantidade 1´s e 2´s: **[9 pontos]**;
- Se o aluno fizer casos menores onde as quantidades de números são: $3k$, $3k+1$ e $3k + 2$ e assim conjecturar a resposta, mas não provar o resultado: **[3 pontos].**