XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Cada questão vale **4 pontos** se, e somente se, para cada uma o resultado escrito pelo aluno coincidir com o gabarito abaixo. Cada questão vale 0 ou 4, isto é, não tem notas parciais. A nota máxima para esta parte é 20.

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	214	--------	182	240	1735

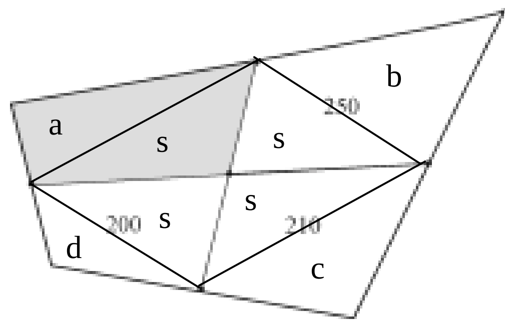
01. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

02. Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado *ABCD* mede 3 cm, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de *EFGH* mede 9 cm, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado *IJKL*, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

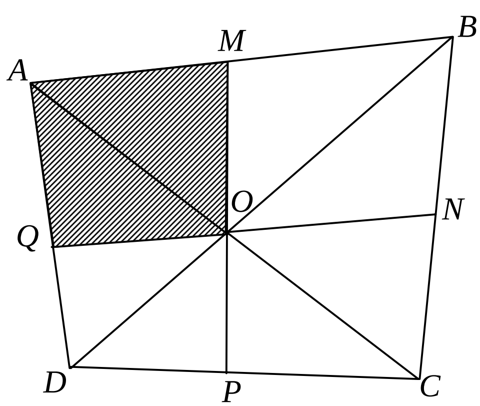
OUTRA SOLUÇÃO: O quadrado *IJKL* e o quadrado *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área s. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma t das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados *IJKL* e *EFGH*, ou seja, $2t = 9^2 - 3^2$, o que fornece t = 36.. Assim, $s = 9 + 36 = 81 - 36 = 45$ cm^2 e o lado do quadrado IJKL é $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.
[A resposta não é um número inteiro. Todos os alunos devem receber 4 pontos].

03. Olhando para o último número da fila n, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a n: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105
O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila $n - 1$ e uma fila n é igual a $n - 1$ e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual $n - 1$. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1+2+\cdots+13)+(1+2+\cdots+13) = 2\cdot\frac{13\cdot 14}{2} =$ **182.**

04. Primeira Solução: Unindo os pontos médios de lados consecutivos do quadrilátero, obtemos segmentos paralelos às suas diagonais e iguais à metade delas. Portanto, o quadrilátero assim obtido é um paralelogramo. Os segmentos traçados dividem cada um dos quatro lotes em duas partes. Todas as partes internas têm a mesma área s, igual a 1/4 da área do paralelogramo. Cada uma das partes externas tem área igual a 1/4 do triângulo determinado pela diagonal correspondente. Assim, $a + c$ é igual à metade da área do quadrilátero, o mesmo ocorrendo com $b + c$. Daí, $a + s + c + s = b + s + d + s$. Portanto, a área S desconhecida satisfaz $S + 210 = 200 + 250$, ou seja, $S =$ **240**.



Segunda Solução: Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.

Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ = 200 + 250 – 210 = 240.

05. Como a + 3 é múltiplo de 11, $a + 3 = 11b$, b $\in$ Z. Sendo a múltiplo de 5, $a - 10b = b - 3$ também é, de modo que $b - 3 = 5c \Leftrightarrow b = 5c + 3 \Leftrightarrow a = 11(5c+3) - 3 = 55c + 30$, $c \in \mathbb{Z}_{+2}$ O número a + 2 é múltiplo de 9, assim como $a + 2 - 54c - 36 = c - 4$. Portanto $c - 4 = 9d \Leftrightarrow c = 9d + 4 \Leftrightarrow a = 55(9d+4) + 30 = 495d + 250$, $d \in \mathbb{Z}$. Por fim, sendo a + 1 múltiplo de 7, então $a + 1 - 497d - 245 = a + 1 - 7\,(71d + 35) = -2d + 6 = -2(d - 3)$ também é, ou seja, $d - 3 = 7k$ $\Leftrightarrow d = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$ e $a = 495(7k+3) + 250 = 3465t + 1735$ Logo o menor valor de a é **1735.**

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Vamos representar por *A*, *G* e *L* a quantidade de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da Prova e por *a*, *g* e *l* as questões respondidas acertadamente em cada uma destas áreas. As condições do problema fornecem as seguintes equações:

$$\frac{a}{A}=0,5;\quad \frac{g}{G}=0,7;\quad \frac{l}{L}=0,8;\quad \frac{a+l}{A+L}=0,62;\quad \frac{g+l}{G+L}=0,74$$

Substituindo as relações expressas pelas três primeiras equações nas outras duas, obtemos:

$$\frac{0,5A+0,8L}{A+L}=0,62 \Rightarrow 0,12A=0,18L \;\Rightarrow A=\frac{3L}{2}$$

$$\frac{0,7G+0,8L}{G+L}=0,74 \Rightarrow 0,04G=0,06L \;\Rightarrow G=\frac{3L}{2}$$

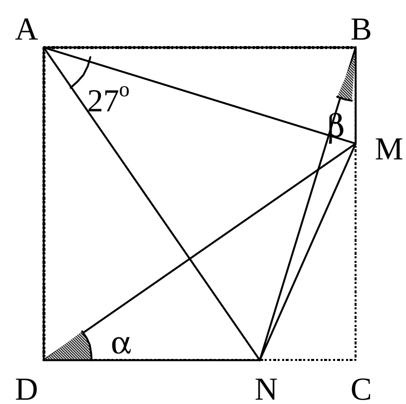
A porcentagem de questões acertadas é:

$$\frac{a+g+l}{A+G+L}=\frac{0,5A+0,7G+0,8L}{A+G+L}=\frac{0,5.\frac{3}{2}L+0,7.\frac{3}{2}L+0,8L}{\frac{3}{2}L+\frac{3}{2}L+L}=\frac{2,6}{4}=0,65=65\%$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Escreveu corretamente as equações iniciais: **[3 pontos]**
Obteve corretamente as relações entre *A*, *G* e *L*: **[2 pontos]**
Indicou corretamente a fração $(a + g + l)/(A + G + \mathrm{L})$ a ser calculada: **[3 pontos]**
Efetuou corretamente os cálculos finais: **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Vamos denotar por *A*, *B*, *C* e *D* os vértices do quadrado e por *MN* o corte efetuado. Como *CM* + *CN* = *BC* = *CD*, resulta que *BM* = *CN* e *DN* = *MC*. Em conseqüência, os triângulos *ADN* e *DCM* são congruentes, o mesmo ocorrendo com *ABM* e *BCN* (em cada caso, os triângulos são retângulos e possuem catetos iguais). Logo, *DÂN* = *CDM* = α e *BÂM* = *CBN* = β. Assim, $\alpha + \beta + 27^o = 90^o$ e $\alpha + \beta = 63^o$.



CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Identificou a congruência de um dos pares de triângulos: **[2 pontos]**
Identificou a congruência de ambos os pares: **[5 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

a) $x^2 - 9xy + 8y^2 = x^2 - xy - 8xy + 8y^2 = x(x - y) - 8y\,(x - y) = (x - 8y)(x - y)$.
Alternativamente, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 9xy + 8y^2$, de incógnita x, são y e $8y$. Logo, $x^2 - 9xy + 8y^2$ fatora em $(x - 8y)(x - y)$.

b) A equação a ser resolvida é $(x - y)(8y - x) = 2005$ (*)
Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5 \cdot 401$.
Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. A soma dos fatores é $\pm$ 406, sendo que somente $\pm$ 406 é múltiplo de 7. Assim,

$$(*)\left|\begin{array}{c} x - y = 5 \text{ e } 8y - x = 401 \\ \text{ou} \\ x - y = 401 \text{ e } 8y - x = 5 \\ \text{ou} \\ x - y = -5 \text{ e } 8y - x = -401 \\ \text{ou} \\ x - y = -401 \text{ e } 8y - x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = 63 \text{ e } y = 58 \\ \text{ou} \\ x = 459 \text{ e } y = 58 \\ \text{ou} \\ x = -63 \text{ e } y = -58 \\ \text{ou} \\ x = -459 \text{ e } y = -58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos
$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),
cujo discriminante é
$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto
$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então $(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e $y - m \leq 7y + m$, então podemos dividir o problema em 4 casos:

- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se y = 58, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2}=\frac{9\cdot 58+396}{2}=459$ e $\frac{9y-m}{2}=\frac{9\cdot 58-396}{2}=63$.

Se y = –58, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2}=\frac{9\cdot(-58)+396}{2}=-63$

e $\frac{9y-m}{2}=\frac{9\cdot(-58)-396}{2}=-459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Parte a: **[5 pontos]** para a fatoração completa. **[Até 2 pontos]** por tentativas mal-sucedidas de obter a fatoração.
Parte b: Dividir o problema em até 8 casos: **[2 pontos]**
Cortar casos imediatos, reduzindo o problema a até 4 casos: **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

1ª maneira:

a) Podemos representar uma seqüência válida como uma seqüência de pares ordenados. O primeiro exemplo é a seqüência [(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)] e, a partir dela, podemos criar outras seqüências válidas movendo o par da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Assim, são válidas as seqüências [(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1)], [(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1), (1,2)],etc. num total de 6 seqüências diferentes. Mudando a posição dos números dos pares ordenados, podemos criar outras 6 seqüências: [(2,1), (1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2)], [(1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2), (2,1)], etc. Portanto, de acordo com as regras dadas há 12 modos de colocar as peças em seqüência.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: [5 pontos]:

i) se o aluno respondeu 12 e explicou, como foi feito acima ou de forma equivalente (com desenhos, por exemplo) então recebe **[5 pontos]**
ii) se o aluno simplesmente apresentou as seqüências, com números ou desenhos das peças, dar **[0,5 ponto]** para cada seqüência correta além das apresentadas no exemplo
iii) se não explicou nada e só repetiu os exemplos dados, dar **[0 ponto]**.

2ª maneira:

a) As pontas devem ter o mesmo número, pois eles aparecem um número par de vezes (se aparecer um número numa ponta e outro na outra, então há pelo menos dois números que aparecem um número ímpar de vezes, o que não ocorre). Alguma peça com dois números iguais deve aparecer em uma das pontas, pois do contrário teríamos três das quatro peças centrais com duas iguais, vizinhas, o que é impossível). Sendo assim, a seqüência pode ser representada por XX-XY-YY-YZ-ZZ-ZX, onde para X temos três possibilidades, para Y temos duas possibilidade e para Z, uma possibilidade, num total de 3.2.1 = 6 possibilidades para a seqüência que começa com uma dupla. Se a seqüência terminar com uma dupla, teremos novamente 6 possibilidades. Portanto, há 12 modos de colocar as seis peças em seqüência.

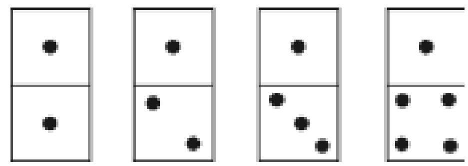
CRITÉRIO DE CORREÇÃO: [5 pontos]:

i) se o aluno respondeu 12 e explicou, como foi feito acima ou de forma equivalente (com desenhos, por exemplo) então recebe **[5 pontos].**

ii) se o aluno simplesmente apresentou as seqüências, com números ou desenhos das peças, dar **[0,5 ponto]** para cada seqüência correta além das apresentadas no exemplo

iii) se não explicou nada e só repetiu os exemplos dados, dar **[0 ponto]**.

b) Para cada número, existem 4 peças. Por exemplo, as peças com o número 1 estão desenhadas ao lado. O número de vezes em que aparece o número 1 é ímpar, logo a seqüência deveria começar com 1 e terminar com outro número ou começar com outro número e terminar com 1. Neste caso, os outros dois números deveriam aparecer um número par de vezes, pois não estariam na ponta, mas isso não ocorre: todos os quatro números aparecem um número ímpar de vezes.



CRITÉRIO DE CORREÇÃO: [5 pontos]:

i) se o aluno usou a argumentação acima dar **[5 pontos]**.

ii) se o aluno pegou um caso particular, como o apresentado acima e de alguma forma mostrou que não existe seqüência contendo as dez peças, dar **[5 pontos]**

iii) desenhos de peças desconexos, seqüências soltas, diagramas não explicados, etc, recebem **[0 ponto]**.