XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 1 (5ª. ou 6ª. séries)

GABARITO

GABARITO NÍVEL 1

1) A	6) D	11) C	16) B
2) A	7) B	12) D	17) C
3) B	8) E	13) E	18) D
4) D	9) A	14) C	19) E
5) B	10) C	15) C	20) A

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 1 = 20 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site www.obm.org.br**

1) (A) Em 6h de trabalho foram retiradas $4000-3520=480$ bolinhas e como a velocidade de retirada é constante, saem $\frac{480}{6}=80$ bolinhas por hora. Para que 2000 bolinhas saiam do tanque são necessárias $\frac{2000}{80}=25$ horas. Portanto o tanque ficou com 2000 bolinhas às 11h do dia seguinte.

2) (A) O eucalipto precisa de cerca de 600 kg de nutrientes por hectare, aproximadamente 1/3 da massa de nutrientes necessários, mais ou menos 1800 kg, para a cana-de-açúcar se desenvolver.

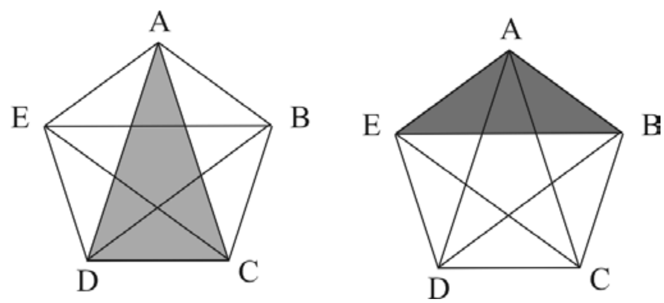
3) (B) Seja n o número de partidas que o time venceu. Então perdeu n – 8 e empatou n – 3 jogos. Portanto, $n+n-8+n-3=31 \Leftrightarrow 3n-11=31 \Leftrightarrow 3n=42 \Leftrightarrow n=14$, isto é, o time venceu 14 partidas.

4) (D) $\left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\times 2006=\frac{2^{2005}\left(2^2+1\right)}{2^{2004}\left(2^2+1\right)}\times 2006=2\times 2006=4012$. A soma dos algarismos do número 4012 é 7.

5) (B) Os algarismos ímpares são 1, 3, 5, 7 e 9. Para que o número seja divisível por 3, a soma dos seus 3 algarismos deve ser múltiplo de 3. Os conjuntos de três algarismos nessas condições são {1,3,5}, {3,5,7}, {5,7,9} e {1,5,9}. Com cada um desses conjuntos podem-se formar seis números diferentes. Por exemplo, para o primeiro, temos os números 135, 153, 315, 351, 513 e 531. Portanto, há $4\times 6=24$ números. *Outra solução*: o resto da divisão dos algarismos ímpares por 3 é igual a 0 (no caso de 3 e 9) ou 1 (no caso de 1 e 7) ou 2 (no caso do 5). Para que a soma de três desses algarismos diferentes dê um número divisível por 3, um deve ter resto 0, um deve ter resto 1 e um deve ter resto 2; logo eles podem ser escolhidos de $2\times 2\times 1=4$ maneiras diferentes e, para cada escolha podemos ordenar os algarismos de $3\times 2\times 1=6$ maneiras diferentes. Logo, a quantidade de números nas condições dadas é igual a $4\times 6=24$.

6) (D) O usuário pagou $52+(140-60)\cdot 1{,}20=148$ reais; no plano de 100 minutos teria pago $87+(140-100)\cdot 1{,}20=135$, ou seja, teria economizado 148 – 135 = 13 reais.

7) (B) Sejam A,B,C,D,E os vértices do pentágono. Para cada um desses vértices podemos contar dois triângulos isósceles cujos vértices coincidem com os vértices do pentágono, e esse vértice é oposto à base, conforme desenho abaixo (por exemplo, o vértice A é oposto às respectivas bases dos triângulos isósceles ACD e ABE. Nota: um triângulo isósceles tem dois lados congruentes e o terceiro lado é chamado *base*.) Como há 5 vértices, concluímos que existem $5\times 2=10$ triângulos nas condições dadas. Outra solução: três vértices do pentágono determinam sempre um triângulo isósceles. Portanto o número de triângulos isósceles é igual ao número de formas pelas quais podemos escolher três vértices do pentágono, igual a $\frac{5\times 4\times 3}{6}=10$.



8) (E) Entre quatro números naturais consecutivos há sempre um múltiplo de 3 e um múltiplo de 4. O produto desses quatro números é múltiplo de 3, logo a soma de seus algarismos é divisível por 3 e, além disso, é múltiplo de 4, isto é, seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4. O único número nessas condições é $1680=5\times 6\times 7\times 8$.

9) (A) O intervalo de tempo entre a partida e o primeiro encontro é igual ao intervalo de tempo entre o primeiro encontro e o segundo encontro, no ponto de partida. Isso acontece porque ao se inverterem as velocidades, a situação seria a mesma que se cada um deles retornasse ao ponto de partida pelo caminho que veio, com a mesma velocidade. Portanto, eles chegarão no mesmo instante, ou seja, o tempo que um irá esperar pelo outro será igual a 0.

10) (C) As horas possíveis são 00, 02, 04, 06, 08, 20 e 22, totalizando 7 possibilidades. Para cada uma dessas horas, os minutos podem ser 00, 02,04,06,08,..., 40, 42, ..., 48, etc, num total de $3\times 5=15$ possibilidades. Portanto, o número de vezes em que o relógio exibe apenas algarismos pares é $7\times 15=105$.

11) (C) Traçando-se retas paralelas aos lados, verificamos que o perímetro da figura é o mesmo que o de um quadrado de lado 20 cm , ou seja, 80 cm.

12) (D) Se Alexandre não vai de carro e acompanha Bento, que não vai de avião, então ambos vão de trem. Carlos não acompanha Dário e não anda de avião, logo é companheiro de Tomás, que não anda de trem; assim, ambos vão de carro. André, que viaja de avião, é companheiro de Dário; logo, ambos vão de avião. Portanto, Alexandre vai de trem e Tomás vai de carro.

13) (E) Seja *n* o número de quadradinhos para formar um lado de uma peça. Então, são necessários $4\cdot(n-2)+4=4n-8+4=4n-4$ quadradinhos para formar a peça inteira. Na última peça da decoração temos $4n-4=40 \Leftrightarrow n=11$. Note que para contar o número de quadradinhos utilizados basta observar que cada peça da esquerda se encaixa na da direita. Se encaixarmos todas, teremos um quadrado completo de lado igual a 11 quadradinhos. Portanto, o número de pastilhas utilizadas foi $11^2 = 121$.

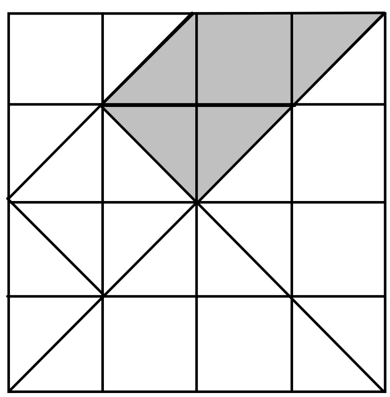
14) (C) O tabuleiro contém $95 \times 95 = 9025$ casas. Nas linhas ímpares, a seqüência é crescente e nas linhas pares, é decrescente. Portanto, na 95ª linha, a última casa da direita apresenta o maior múltiplo de 4 no tabuleiro, ou seja, Sara escreveu na casa U o número $9025 \times 4 = 36100$.

15) (C) Como os quadrados pequenos dividem o maior em quatro quadriláteros congruentes, a área pintada é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores, ou seja, 800. Como a área pintada do quadrado maior é igual à sua área não pintada, concluímos que a área do quadrado maior é igual a 72% da área total pintada, ou seja, $0,72 \times 800 = 576$.

16) (B) Seja $A = 15p + 7$. Como $\frac{A}{3} = \frac{15p+7}{3} = 5p + \frac{7}{3}$, concluímos que o resto da divisão de A por 3 é igual ao resto da divisão de 7 por 3, ou seja, 1. De forma análoga, o resto da divisão de A por 5 é o mesmo que o da divisão de 7 por 5, ou seja, igual a 2. A soma desses restos é igual a 1 + 2 = 3.

17) (C) Se x era a idade de Neto no final de 1994, então o ano em que nasceu é $1994 - x$; de forma análoga, o ano em que sua avó nasceu é $1994 - 2x$. Assim, temos $(1994 - x) + (1994 - 2x) = 3844 \Leftrightarrow 3988 - 3x = 3844 \Leftrightarrow 3x = 144 \Leftrightarrow x = 48$. Portanto, Neto completa em 2006 a idade de $(2006 - 1994) + 48 = 12 + 48 = 60$ anos.

18) (D) Colocando o Tangram sobre uma malha quadriculada, a região sombreada ocupa 3 quadradinhos da malha e sua área é, portanto, $\frac{3}{16}$ da área do Tangram, ou seja, $\frac{3}{16} \cdot 64 = 12$ cm^2.



19) (E) A palavra BRASIL tem 6 letras diferente. Fixando a primeira letra à esquerda, restam 5 letras. O número de palavras que se obtém permutando-se essas 5 letras é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Portanto, após fixar à esquerda as letras A, B e I, teremos listado $3 \times 120 = 360$ palavras. Obedecendo à ordem alfabética, a próxima letra a ser fixada é L; escrevendo as demais letras em ordem alfabética, teremos a palavra LABIRS.

20) (A) Supondo que x seja o número de horas por dia, então x também é o número de dias por semana, o número de semanas por mês e o número de meses por ano. Logo, o número de horas por ano é $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 = 4096 \Leftrightarrow x^4 = 2^{12} \Leftrightarrow x^4 = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$. Portanto o número de semanas por mês é 8.