XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) D	6) A	11) D	16) C	21) C
2) C	7) C	12) C	17) B	22) E
3) C	8) A	13) E	18) C	23) D
4) A	9) B	14) C	19) B	24) C
5) C	10) D	15) D	20) C	25) D

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site www.obm.org.br**

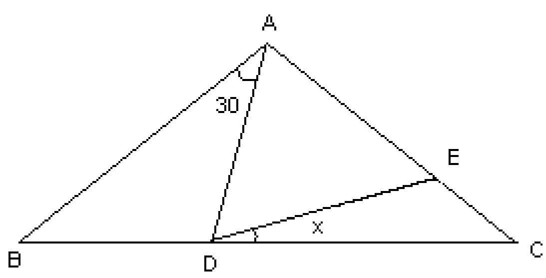
1) (D) $\left(\dfrac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\times 2006=\dfrac{2^{2005}\left(2^2+1\right)}{2^{2004}\left(2^2+1\right)}\times 2006=2\times 2006=4012$. A soma dos algarismos do número 4012 é 7.

2) (C) Traçando-se retas paralelas aos lados, verificamos que o perímetro da figura é o mesmo que o de um quadrado de lado 20 cm , ou seja, 80 cm.

3) (C) $10a+b=5(a+b)\Rightarrow 5a=4b\Rightarrow a=4, b=5\Rightarrow 54=6\times 9$

4) (A) O intervalo de tempo entre a partida e o primeiro encontro é igual ao intervalo de tempo entre o primeiro encontro e o segundo encontro, no ponto de partida. Isso acontece porque ao se inverterem as velocidades, a situação seria a mesma que se cada um deles retornasse ao ponto de partida pelo caminho que veio, com a mesma velocidade. Portanto, eles chegarão no mesmo instante, ou seja, o tempo que um irá esperar pelo outro será igual a 0.

5) (C)

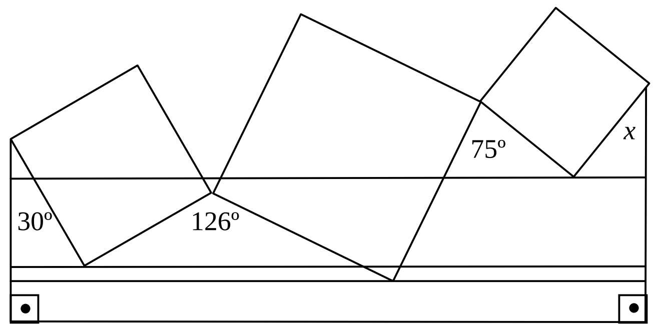


$\angle ADE + x = 30^o + \angle ABD \Rightarrow \angle ADE = \angle AED = 30^o + \angle ABD - x = x + \angle ACD \Rightarrow x = 15^o$.

6) (A) Sejam $n-1$, n e $n+1$ os três números inteiros consecutivos. Temos
$(n-1)+n+(n+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\Leftrightarrow 3n=n(n^2-1)\Leftrightarrow n^2-1=3\Leftrightarrow n^2=4\Leftrightarrow n=2$
Portanto os números são 1, 2, 3 e a soma dos quadrados dos três números consecutivos é $1^2+2^2+3^2=14$.

7) (C) Se x era a idade de Neto no final de 1994, então o ano em que nasceu é $1994 - x$; de forma análoga, o ano em que sua avó nasceu é $1994 - 2x$. Assim, temos $(1994 - x) + (1994 - 2x) = 3844 \Leftrightarrow 3988 - 3x = 3844 \Leftrightarrow 3x = 144 \Leftrightarrow x = 48$. Portanto, Neto completa em 2006 a idade de $(2006 - 1994) + 48 = 12 + 48 = 60$ anos.

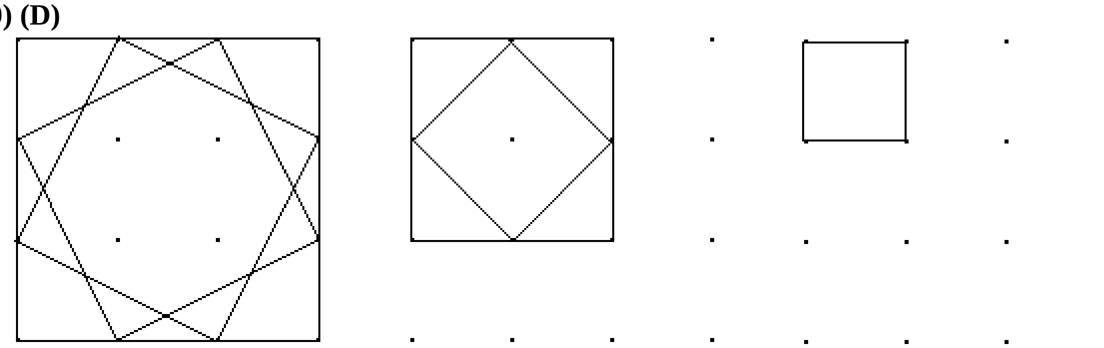
8) (A) Trace retas horizontais pelos vértices mais baixos dos três quadrados:



Então os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da esquerda são 60º e 30º, respectivamente; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado do meio são respectivamente 180º – 126º – 30º = 24º e 90º – 24º = 66º; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da direita são respectivamente 180º – 75º – 66º = 39º e 90º – 39º = 51º. Enfim, no triângulo retângulo com um dos ângulos igual a x, temos x = 90º – 51º = 39º.

9) (B) O número $24 = 2^3 3$ tem somente dois divisores cubos perfeitos: 1 e 8. Assim, se é possível representar 24 na forma a^2b^3, então $b = 1$ ou $b = 2$ e, portanto, $a^2 = 24$ ou $a^2 = 3$, o que é impossível. Além disso, na alternativa a podemos tomar $a = 3$ e $b = 2$; na alternativa c, podemos tomar $a = 24$ e $b = c = 1$; na alternativa d, podemos tomar $a = 3$, $b = 1$ e $c = 2$; e na alternativa e, podemos tomar $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$.

10) (D)

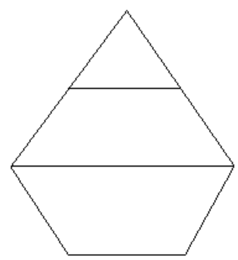


(veja as figuras acima)
Contagem:
9 quadradinhos 1×1
4 quadrados 2×2, mas cada um dele tem um inscrito, então o total é $4 \times 2 = 8$
1 quadrado 3×3, mas com 2 quadrados inscritos, então o total é 3
Total: 9 + 8 + 3 = 20

11) (D) Se Alexandre não vai de carro e acompanha Bento, que não vai de avião, então ambos vão de trem. Carlos não acompanha Dário e não anda de avião, logo é companheiro de Tomás, que não anda de trem; assim, ambos vão de carro. André, que viaja de avião, é companheiro de Dário; logo, ambos vão de avião. Portanto, Alexandre vai de trem e Tomás vai de carro.

12) (C) $R = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{6a^2\sqrt{3}}{16}} = \dfrac{2}{3}$, pois o lado do hexágono é metade do lado do triângulo.

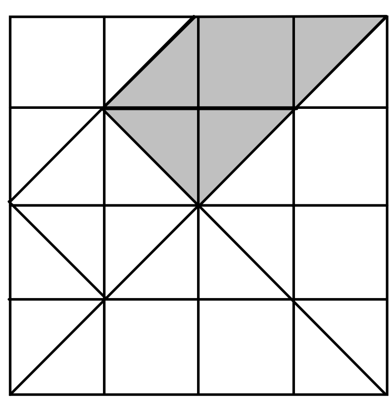
Existe uma maneira bem geométrica de resolver, basta observar a figura!



13) (E) Sabemos que $n^3 - n$ é divisível por 6 para todo $n = 1,2,3,\ldots$, e esse é o máximo divisor comum porque $2^3 - 2 = 6$.

14) (C) Seja H o número de filhos homens e M o número de filhas mulheres. As afirmações são equivalentes à $H - 1 = M + 3$ e $H = 2(M - 1)$. Resolvendo o sistema, temos: $M = 6$ e $H = 10$, logo a quantidade de filhos é 16.

15) (D) Colocando o Tangram sobre uma malha quadriculada, a região sombreada ocupa 3 quadradinhos da malha e sua área é, portanto, $\dfrac{3}{16}$ da área do Tangram, ou seja, $\dfrac{3}{16} \cdot 64 = 12\,\text{cm}^2$.



16) (C) Vamos contar primeiro quantos números desse tipo existem:

2 com 1 dígito

2^2 com 2 dígitos

2^3 com 3 dígitos
Cada número desejado pode ser pareado com outro trocando os dígitos 2 por 1 (e vice versa). Por exemplo, 122 e 211. A soma dos números em cada par é algo do tipo: 33..3.
Assim, a soma total é

$$\frac{2}{2}\times 3+\frac{2^2}{2}\times 33+\frac{2^3}{2}\times 333=1401.$$

17 (B) Pela desigualdade triangular, os números reais *a*, *b* e *c* são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se,

$$\left|\begin{array}{l} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1-c>c \\ 1-a>a \\ 1-b>b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c<\dfrac{1}{2} \\ a<\dfrac{1}{2} \\ b<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

18 (C) Devemos ter $c(c + 1) = 30$ então $c = 5$. Agora para $a + b = 25$ temos 24 soluções diferentes para o par (a, b). Daí, a resposta correta seria 24.

19 (B) 1°) Existem 9×8 números de dois dígitos distintos, exatamente metade deles é bonito e a outra metade não é. Logo existem $9 \times 8/2 = 36$ números bonitos.

2°) Existem 8 números bonitos que terminam em 1, 7 que terminam em 2, ..., 1 que termina em 8. Logo existem: 8 + 7 + ... + 1 = 36 números bonitos.

20 (C) A soma de todas as notas é 71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400. A média de *k* números é inteira quando a soma dos *k* números é divisível por *k*. Assim, como 400 é divisível por 4 e a soma das quatro primeiras notas deve ser divisível por 4, o último número a ser digitado é múltiplo de 4, ou seja, é 76 ou 80.
Se o último número é 76, a soma dos outros quatro números é 400 – 76 = 324, que é múltiplo de 3. Seguindo um raciocínio análogo ao anterior, obtemos que o penúltimo número a ser digitado é múltiplo de 3. Mas nenhum dos cinco números é múltiplo de 3, absurdo.
Logo o último número é 80 (de fato, podem ocorrer as "ordens de digitação" 76, 82, 91, 71, 80 e 82, 76, 91, 71, 80).

21 (C) Multipliquemos primeiro os dois últimos radicais

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ .\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Obtemos : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Agora multipliquemos este fator encontrado pelo segundo fator da expressão

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\ .\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Obtemos: $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Finalmente multipliquemos este resultado pelo primeiro fator da expressão

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\ .\ \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$$

22 (E) 2 a 9 – 8 números – 8 algarismos
10 – 99 – 90 números – 180 algarismos
Ainda restam 1818 algarismos e portanto ainda conseguimos formar 606 números de 3 algarismos. Assim, o livro de Ludmilson tem 9 + 90 + 606 = 705 páginas.

23 (D) Se $x+y+z=0$, então $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{x^3y^3}+\frac{1}{x^3z^3}+\frac{1}{y^3z^3}\right)=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^3y^3z^3}=\frac{3xyz}{x^3y^3z^3}=\frac{3}{x^2y^2z^2}.$$

24 (C) As horas possíveis são 00, 02, 04, 06, 08, 20 e 22, totalizando 7 possibilidades. Para cada uma dessas horas, os minutos podem ser 00, 02,04,06,08,..., 40, 42, ..., 48, etc, num total de $3\times5=15$ possibilidades. Portanto, o número de vezes em que o relógio exibe apenas algarismos pares é $7\times15=105$.

25) (D)

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{1}{2} \\ \angle DAB=60^o+\angle GAB=\angle GAF \end{array}\right. \underset{LAL}{\Leftrightarrow} \Delta DAB\approx\Delta GAF$$

, com razão de semelhança 2.

Portanto $\dfrac{BD}{FG}=2$.