XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) E	6) E	11) B	16) D	21) E
2) E	7) C	12) D	17) B	22) D
3) E	8) C	13) C	18) A	23) B
4) D	9) A	14) C	19) B	24) Anulada
5) B	10) E	15) A	20) B	25) Anulada

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Deve ser atribuído 1 ponto para todos os alunos nas questões anuladas.**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1) (E) No resultado da multiplicação de 101 por $\underbrace{1111\cdots1}_{\text{2007 algarismos 1}}$, o dígito 1 aparece 4 vezes e o dígito 2 aparece 2007 – 4 = 2005 vezes. Portanto a soma dos algarismos desse número é $1\times4+2\times2005=4+4010=4014$.

2) (E) A soma $a+b$ é 1 se a = 0 e b = 1, ou seja, $\frac{a}{b}=0$, incompatível com o desenho. A soma é 2 se $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}=1$, também incompatível. E a soma é 3 se $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{1}=2$, ambos incompatíveis.
Os casos em que a soma é 4 são: $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{2}=1$ ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{1}=3$, todos incompatíveis.
Como todas as quatro primeiras alternativas são falsas, a alternativa **E)** é a verdadeira.
De fato, a soma é 5 nos casos: $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$ ou $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}>1$, dos quais a possibilidade a = 2 e b = 3 dá a fração $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}\cong0{,}67$.

3) (E) Como o triângulo ABC é eqüilátero, o ângulo interno $\hat{A}$ mede 60º. Se $\overline{DG}$ é paralelo a $\overline{AB}$, então o ângulo entre $\overline{DG}$ e $\overline{AC}$ é 60º ou 180º – 60º = 120º. Sendo x o maior ângulo entre esses dois segmentos, x = 120º.

4) (D) Sejam H, M e C as quantidades de homens, mulheres e crianças, respectivamente. Temos H/M = 2/3 e M/C = 8. Logo, $H/C = H/M \,.\, M/C$ = 16/3. Logo, a razão entre o número de adultos e crianças é $(H + M)/C = H/C + M/C$ = 8 + 16/3 = 40/3.

5) (B) Os 156 estudantes que resolveram todos os problemas corretamente correspondem a 100% – 25% – 15% = 60% do total. Logo, o número total de estudantes é (600/100). 156 = 260.

6) (E) Como N é o quadrado de um quadrado perfeito, N é uma quarta potência e, como possui o fator $12 = 2^2 \times 3$, N deve ser divisível por $2^4\times3^4$ = 1296. Logo. N é da forma 1296k, em que k é inteiro positivo. Portanto, N/12 = 108k e o menor valor possível para N/12 é 108.

7) (C) A área do jardim é $5a^2$, onde a é o lado do quadrado. Pelo Teorema de Pitágoras, $AB^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$ Daí, $5a^2 = 100$, que é a área do jardim.
Observação: também é possível resolver o problema sem usar o Teorema de Pitágoras, formando o quadrado de lado AB e observando que sua área é equivalente à de 5 quadrados menores.

8) (C) Tem-se $a = k(b + c)$, $b = k(c + a)$ e $c = k(a + b)$. Logo, $(a + b + c) = 2k(a + b + c)$. Há dois casos: ($i$) $a + b + c$ 0; neste caso, $k = ½$ (e a igualdade ocorre se e só se $a = b = c \neq 0$);
(ii) $a + b + c = 0$. Neste caso, tem-se $a/(b + c) = b/(c + a) = c/(a + b)$. $= -1$. Portanto, k pode assumir os valores ½ ou –1.

9) (A) Um polígono convexo inscrito no círculo fica determinado quando seus vértices são escolhidos. Cada um dos 12 pontos pode ou não ser escolhido como vértice, dando um total de $2^{12} = 4096$ escolhas. Mas para determinar um polígono precisamos escolher 3 ou mais vértices. Logo, do número acima devemos excluir os casos em que são escolhidos 0 pontos (1 caso), 1 ponto (12 casos) ou 2 pontos ($12 \times 11/2 = 66$ casos). Portanto, o número de polígonos é $4096 - 1 - 12 - 66 = 4017$.

10) (E) A soma dos números de m a n é $(m + n)(n - m + 1)/2$. Ou seja, devemos ter $(m + n)(m - n + 1)/2 = 2007$, cuja decomposição em fatores primos é $3 \times 3 \times 223$. Da igualdade $(m + n)(n - m + 1) = 2\times 3 \times 3 \times 223$ (e observando que $m + n > n - m + 1$), podemos ter os seguintes casos:

a) $m + n = 223$, $n - m + 1 = 18$ (que resulta em $m = 103$ e $n = 120$).
b) $m + n = 446$, $n - m + 1 = 9$ (que resulta em $m = 219$ e $n = 227$).
c) $m + n = 669$, $n - m + 1 = 6$ (que resulta em $m = 332$ e $n = 337$).
d) $m + n = 1338$, $n - m + 1 = 3$ (que resulta em $m = 668$ e $n = 670$).
e) $m + n = 2007$, $n - m + 1 = 2$ (que resulta em $m = 1003$ e $n = 1004$)

Portanto, 2007 pode ser escrito de 5 modos como soma de dois ou mais números inteiros e consecutivos.

11) (B) Ambas as equações tem 1 como raiz. As outras raízes são 1/2007 e 2007, cujo produto é 1.

12) (D) $a(b + c) - b(a + c) = c(a - b)$, que é máximo quando c é máximo (ou seja, igual a 10) e $b - a$ é máximo (ou seja, $b = 10$ e $a = 1$). Portanto, o produto máximo é $10 \times (10 - 1) = 90$.

13)(C) Como $100 = x < 1000$, temos $600 = 6x < 6000$ e $700 = 7x < 7000$. Os números $6x$ e $7x$ podem ter ambos 3 algarismos ou ambos 4 algarismos. Para que ambos tenham 3 algarismos, deve-se ter $7x < 1000$, ou seja, $x < 142{,}8...$; há 43 números nestas condições. Para que ambos tenham 4 algarismos, deve-se ter $6x = 1000$, ou seja, $x = 166{,}6...$; há 833 números nestas condições. Logo, há 876 números satisfazendo as condições do problema.

14)(C) Os triângulos isósceles junto à base têm área igual a do quadrado. Os dois junto aos vértices superiores tem área igual a ¼ da área do quadrado. Finalmente, o central no topo tem área igual à metade da área do quadrado. Logo, a área total é 3 + 2 + ½ + ½ = 6.

15) (A) Note que $(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$.
Seja $y = x^2 + 3x$. Então $1 + y(y+2) = 181^2 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 181^2 \Leftrightarrow y + 1 = 181 \Leftrightarrow y = 180$.

16) (D) Sendo x, y e z as áreas das partes brancas, a área pedida é: $(121 – x) + (49 – y – z) – (81 – x – y) – (25 – z) = 121 + 49 – 81 – 25 = 64$ cm^2.

17) (B) Se o primeiro acidente é sofrido no ano $N + 1$, Jean gasta $1500(N + 1) + 1400$ com a seguradora A e $1700(N + 1) + 700$ com a seguradora B. Para que A seja mais favorável, devemos ter $1500(N + 1) +1400 < 1700(N + 1) + 700$ ou seja $N > 2,5$. Logo, Jean deve ficar pelo menos 3 anos sem sofrer acidentes.

18) (A) A face 1 estará, no início, voltada para Leste e, a seguir, voltada para baixo. Quando o 2 estiver para baixo, 1 estará a Oeste. Quando o 3 estiver para baixo, 1 continua a Oeste. Quando o 5 estiver para baixo (face oposta ao 2), o 1 permanece a Oeste e assim termina após os movimentos.

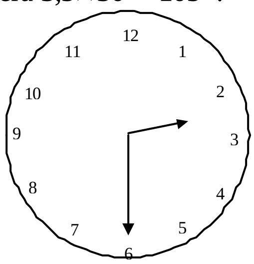
19) (B)

A) Falsa (há 16 do lado direito e 20 do esquerdo)
B) Verdadeira (há 9 do lado direito e 6 do esquerdo)
C) Falsa (há 45)
D) Falsa (há 5 do lado direito e 4 do esquerdo)
E) Falsa (há 15).

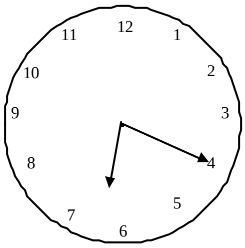
20) (B) A soma dos outros lados tem que ser maior que $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Logo, o perímetro deve ser maior que $5\sqrt{3} = 8,66...$, o que mostra que o menor perímetro inteiro possível é 9.

21) (E) Para medir o ângulo entre os ponteiros, basta obter as posições dos dois ponteiros. Fazendo isso para cada um dos horários, lembrando que o ângulo entre dois números consecutivos do relógio é 30º:

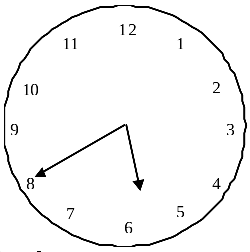
- 02h30: o ponteiro maior está sobre o 6 e o menor está exatamente na metade entre o 2 e o 3. Logo o ângulo entre eles será $3,5 \times 30° = 105°$.



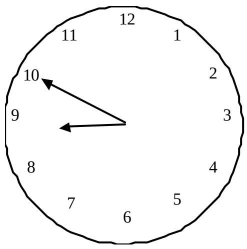
- 06h20: o ponteiro maior está sobre o 4 e o menor está 1/3 de hora depois do 6. Logo o ângulo é $\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times 30° = 70°$.



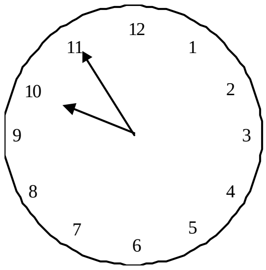
- 05h40: o ponteiro maior está sobre o 8 e o menor está 1/3 de hora antes do 6. Logo o ângulo é $\left(2+\frac{1}{3}\right)\times 30^{\text{o}} = 70^{\text{o}}$.



- 08h50: o ponteiro maior está sobre o 10 e o menor está 1/6 de hora antes do 9. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{6}\right)\times 30^{\text{o}} = 35^{\text{o}}$.



- 09h55: o ponteiro maior está sobre o 11 e o menor está 1/12 de hora antes do 10. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 30^{\text{o}} = 32{,}5^{\text{o}}$.

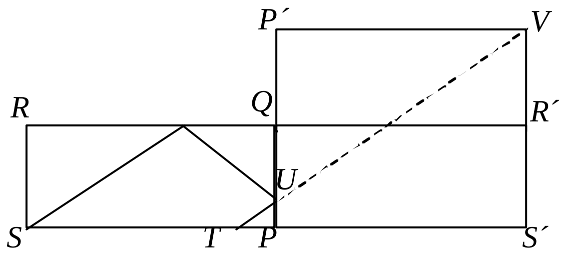


22) (D) Sendo d o mdc destes números, temos que $d \mid 2332 - 1221 = 1111 = 11\times 101$. Como 101 é primo, 101 não divide 1221 e 11 divide todos os 8 números, 11 é o *mdc* procurado.

23) (B) Sejam B e C os pontos de batida da bola em PQ e QR, respectivamente, e A o ponto onde a bola está inicialmente. Como os ângulos das trajetórias de batida com a mesa são iguais, deveremos ter os triângulos APB, CQB e CRS semelhantes. Seja $BP = x$. Assim:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{CQ}{3-x} \Leftrightarrow CQ = \frac{3}{x} - 1\ ,\quad \frac{AP}{BP} = \frac{CR}{RS} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{7-3/x}{3} \Leftrightarrow 3 = 7x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$$

Outra Solução:



Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, ao refletirmos o retângulo inicial em relação ao lado PQ e em seguida refletindo em relação ao lado $QR´$, obtemos um segmento TUV, de acordo com a figura acima. Logo, pela semelhança dos triângulos TPU e $TS´V$, temos $\frac{TP}{TS´} = \frac{PU}{S´V} \Rightarrow \frac{1}{1+6} = \frac{PU}{6} \Rightarrow PU = \frac{6}{7}$.

24) (Anulada) Os únicos números com essa propriedade são: 110, 121, 152, 240, 251, 282 e 390. A diferença entre o maior e o menor é 280, que é múltiplo de 7 e, além disso, 2 + 8 + 0 = 10. (há duas alternativas corretas).

25) (Anulada) Os primeiros termos dessa seqüência são: 1, 3, 7, 15, 13, 9, 19, 21, 7, 15, ..., de onde vemos que ela tem período 6 a partir do 3º termo. Assim, $a_{31} = a_{25} = a_{19} = a_{12} = a_7 = 19$, $a_{32} = a_8 = 21$, $a_{33} = 7$, $a_{34} = 15$ e $a_{35} = 13$. A soma tem valor 19 + 21 + 7 + 15 + 13 = 75 (não há alternativa correta).