XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

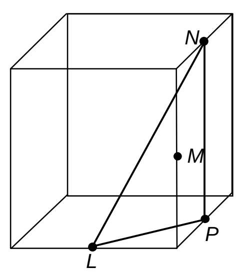
GABARITO NÍVEL 3

1) D	6) C	11) C	16) D	21) C
2) C	7) B	12) C	17) C	22) Anulada
3) Anulada	8) D	13) B	18) A	23) B
4) B	9) B	14) C	19) B	24) Anulada
5) B	10) A	15) D	20) B	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Deve ser atribuído 1 ponto para todos os alunos nas questões anuladas.**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site www.obm.org.br**

1. **(D)** Os números em questão são 12, 23, 34, 45, …, 89 (8 números), 123, 234, 345, …, 789 (7 números), 1234, 2345, …, 6789 (6 números) e, por fim, 12345, um total de 8 + 7 + 6 + 1 = 22 números.

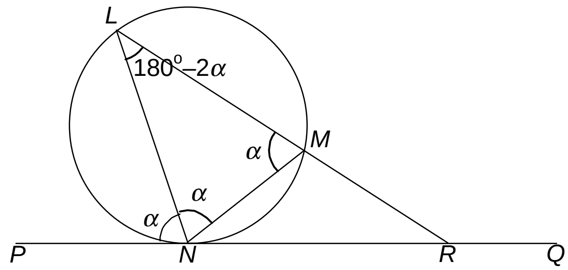
2. **(C)** Seja NP uma paralela às arestas verticais do cubo. Sendo $2a$ a medida da aresta do cubo, pelo teorema de Pitágoras, $LP = LM = MN = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ e $LN = \sqrt{LP^2+PN^2} = \sqrt{2a^2+(2a)^2} = a\sqrt{6}$.



Pela lei dos co-senos, $\cos LMN = \dfrac{LM^2+MN^2-LN^2}{2\cdot LM\cdot MN} = \dfrac{2a^2+2a^2-6a^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$. Logo o ângulo LMN mede 120°.

3. Alternativa Anulada

Solução: (Esmeralda confundiu-se, digitando $\alpha < 60°$ onde deveria ser $\alpha > 60°$.)



Como a reta PQ é tangente à circunferência, os ângulos LNP e LMN são congruentes, ou seja, $m(LMN) = \alpha$. Sendo o triângulo LMN isósceles com $LM = LN$, os ângulos LNM e LMN são congruentes, e, portanto, $m(MLN) = 180^o - m(LNM) - m(LMN) = 180^o - 2\alpha$.

O ângulo LNP é externo do triângulo LNR, logo $m(LNP) = m(NLR) + m(LRN)$, ou seja, $\alpha = 180^o - 2\alpha + m(LRP) \Leftrightarrow m(LRP) = 3\alpha - 180^o$.

4. **(B)** Sabendo que $O\times B\times M = 240 \Leftrightarrow O\ \times B = \dfrac{240}{M} \Leftrightarrow B\times M = \dfrac{240}{O}$,

$O\times B + M = 46 \Leftrightarrow \dfrac{240}{M} + M = 46 \Leftrightarrow M^2 - 46M + 240 = 0 \Leftrightarrow M = 6$ ou $M = 40$ e

$O + B\times M = 64 \Leftrightarrow O + \dfrac{240}{O} = 64 \Leftrightarrow O^2 - 64O + 240 = 0 \Leftrightarrow O = 4$ ou $O = 60$.

Sendo O, B e M inteiros, a única possibilidade é $O = 4$, $M = 6$ e $B = \dfrac{240}{4\times 6} = 10$.

Assim, $O + B + M = 4 + 10 + 6 = 20$.

5. **(B)** Observando que $111111 = 15873\cdot 7$ é múltiplo de 7, e sendo 2004 múltiplo de 6, conclui-se que $\underbrace{111\ldots111}_{2004}$ é múltiplo de 7. Da mesma forma, $\underbrace{222\ldots222}_{2004}$ é múltiplo de 7. Logo o número digitado por Esmeralda é múltiplo de 7 se, e somente, se, o número de dois algarismos $10n + 2$ é múltiplo de 7, o que ocorre se, e somente se, $n = 4$.

6. **(C)** Como $\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}} > \sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}}$ e x é inteiro positivo,

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x + \tfrac{1}{2}\sqrt{y} - 2\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}} + x - \tfrac{1}{2}\sqrt{y} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}y}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - y$$
$$\Leftrightarrow y = 4x - 1$$

A única alternativa que contém um número da forma $4x - 1$ é a alternativa C.

7. **(B)** Note que giramos o bloco 5 vezes. Indicaremos os quadradinhos em contato com o bloco após o i-ésimo giro com o número i. Os quadradinhos em contato com o bloco na sua posição inicial estão indicados com o número zero.

			0				
	4	**4**	**0/4**	**3**	**3**		
	5	**5**	**1/5**	**2**	**2**		
	5	**5**	**1/5**	**2**	**2**		
			1	**2**	**2**		

Contando, observamos que o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.

8. **(D)** Pela promoção, quem levar 2 unidades paga pelo preço de 1,5 unidade, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva quatro e paga três.

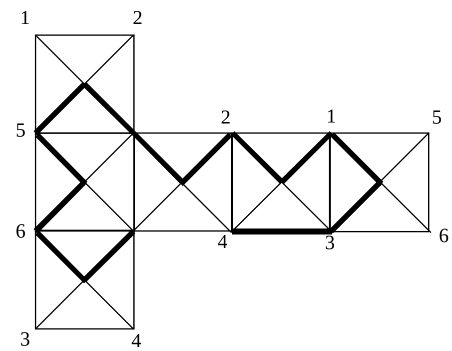
9. **(B)** O volume de platina produzido na história é

$$50 \text{ anos} \cdot \frac{110 \text{ toneladas}}{1 \text{ ano}} \cdot \frac{1000000 \text{ g}}{1 \text{ tonelada}} \cdot \frac{1\, cm^3}{21{,}45\, g} \cdot \frac{1\, m^3}{1000000\, cm^3} \cong 256\, m^3,$$

volume próximo ao de uma piscina (por exemplo, de 1,6 m de profundidade, 16 metros de largura e 10 metros de comprimento).

10. **(A)** O menor caminho que passa pelos 14 vértices deve conter 13 arestas, sendo que o máximo delas devem ter comprimento mínimo. Considerando que as arestas do cubo medem 1 e que as arestas ligando centro de faces a vértices medem $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tal caminho deve conter o máximo possível das arestas ligando centro de faces a vértices. Suponha que existe um caminho com 13 arestas medindo $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pinte os 8 vértices do cubo de vermelho e os 6 centros das faces de azul. Note que nesse caminho dois vértices vizinhos tem cores diferentes e portanto a quantidade de

vértices de cada cor é igual, absurdo. Logo um caminho mínimo deve conter pelo menos uma aresta do cubo. Exibimos um caminho com exatamente uma aresta do cubo na planificação a seguir, em que números iguais representam vértices iguais.



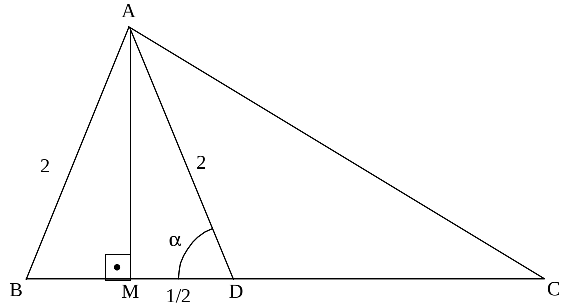
Esse caminho tem comprimento $1+12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1+6\sqrt{2}$.

11. **(C)** Em um poliedro, de cada vértice saem pelo menos três arestas. Assim, de cada vértice do hexágono sai pelo menos mais uma aresta. Assim, o poliedro tem pelo menos mais 6 arestas, totalizando, junto com as 6 arestas do hexágono, pelo menos 12 arestas. Um poliedro com uma face hexagonal e 12 arestas é uma pirâmide de base hexagonal, assim a quantidade mínima de arestas que um poliedro nas condições do enunciado pode ter é 12.

12. **(C)** Como 365 dividido por 7 dá quociente 52 e resto 1 e 366 dividido por 7 dá o mesmo quociente e resto 2, em um ano, bissexto ou não, há no máximo 53 domingos. Um mês tem entre $28=4\cdot 7$ e $31=4\cdot 7+3$ dias, então todo mês tem 4 ou 5 domingos. Como 53 dividido por 12 dá quociente 4 e resto 5, há no máximo 5 meses com 5 domingos.

Um exemplo de ano com cinco meses com cinco domingos é um iniciado no domingo.

13. **(B)**



Como os ângulos *BAD* e *CAD* são congruentes, o segmento *AD* é bissetriz interna do ângulo *BAC* do triângulo *ABC*. Assim, pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow AC = 2CD$$

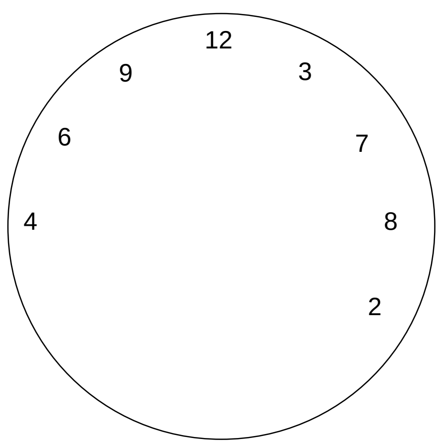
Sendo *M* ponto médio de *BD*, temos *AM* perpendicular a *BD*. Assim, no triângulo retângulo *AMD*, temos $\cos\alpha = \frac{MD}{AD} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$.

Aplicando a lei dos co-senos ao triângulo *ACD*, temos

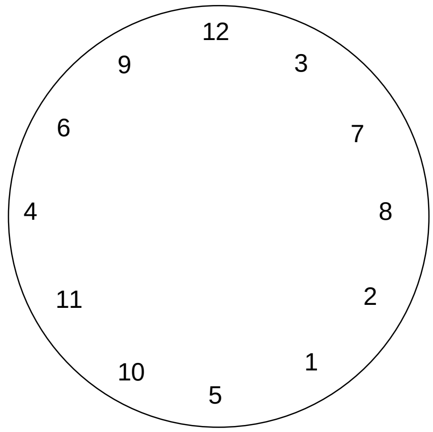
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$\Leftrightarrow (2CD)^2 = 2^2 + CD^2 - 2 \cdot 2 \cdot CD \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3CD^2 - CD - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow CD = \frac{4}{3}$$

14. (C) Os seguintes pares de números têm soma igual a algum número triangular: {1;2}, {1;5}; {1;9}, {2;4}, {2;8}, {3;7}, {3;12}, {4;6}, {4;11}, {5;10}, {6;9}, {7;8}, {9;12}, {10;11}.

Assim, observando em quais pares aparecem o número 12, observamos que seus vizinhos são obrigatoriamente 3 e 9. Da mesma forma, o outro vizinho do 3 é 7; o outro vizinho do 7 é 8; o outro vizinho do 8 é 2. Além disso, como o 6 só está nos pares {6;9} e {4;6}, os vizinhos de 6 são obrigatoriamente 4 e 9. Assim, supondo sem perda de generalidade que 3 está à direita de 12, temos os seguintes números no relógio:



Considerando que 4 e 2 não podem ser vizinhos, concluímos que o outro vizinho do 4 é 11. Continuando, temos que o outro vizinho do 11 é 10; o outro vizinho do 10 é 5; o outro vizinho do 5 é 1. E podemos completar o relógio:



Assim, o número que ocupa a posição original do 6 é o 5. Note que esse número ainda seria 5 se trocássemos as posições dos vizinhos do 12.

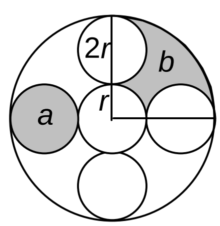
15. **(D)** Sejam $x = a_1$, $y = a_2$ e $z = a_3$. Então $a_4 = z(x + y)$ e $a_5 = z(x + y)(y + z)$, ou seja, $35 = z(x + y)(y + z)$. Sendo x, y e z inteiros positivos, $x + y$ e $y + z$ são maiores que 1 e também são divisores de $35 = 5 \cdot 7$. Assim, como 35 não pode ser escrito como produto de três inteiros maiores que 1, $z = 1$. Portanto, como x é pelo menos 1, $x + y$ é maior ou igual a $y + z$, de modo que $y + z = 5$ e $x + y = 7$. Logo $a_4 = 1 \cdot 7 = 7$.

16. **(D)** Temos

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c) \Leftrightarrow a + bc = a^2 + ab + ac + bc$$
$$\Leftrightarrow a(a + b + c - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ ou \ a + b + c = 1$$

Tomando $a = 1$ e $b = c = 0$ vemos que as demais alternativas estão incorretas.

17. **(C)**



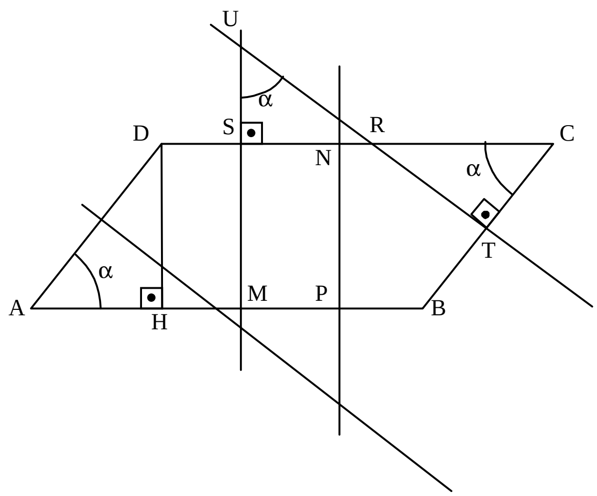
A área a é igual à área de um círculo de raio r, ou seja, $a = \pi r^2$. A área b é igual á área de um quarto de círculo de raio $3r$ subtraída de duas vezes a área de um semicírculo de raio r e da área de um quarto de círculo de raio r. Logo $b = \frac{1}{4} \cdot \pi(3r)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \pi r^2$. Portanto $\frac{a}{b} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 1$.

18. (A) Sejam x e $13 - x$ a quantidade de números negativos e positivos, respectivamente.

Assim, há $x(13 - x)$ pares de números com produto negativo.

Logo $x(13 - x) = 22 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 11$. Como há mais positivos que negativos, há 2 números negativos.

19. (B) Seja *ABCD* o paralelogramo que tem a propriedade descrita no enunciado e sejam □ a medida de seus ângulos agudos e $AB = a$ e $AD = b$ suas dimensões. Considere também os pontos marcados na figura e seja *DH* uma altura do paralelogramo.



A região do plano limitada pelas quatro retas perpendiculares aos lados de um paralelogramo não retângulo pelos seus pontos médios é um quadrilátero. Os pares de perpendiculares a retas paralelas são paralelos, de modo que tal quadrilátero é um paralelogramo. Observe também que os triângulos *CRT* e *URS* têm ângulos de mesma medida, logo esse paralelogramo tem ângulos agudos de medida α.

Além disso, uma altura do paralelogramo é $MP = HP - HM = DN - (AM - AH) = AM - AM + AH = AH = b \cdot \cos\alpha$. Analogamente, a outra altura mede $a \cdot \cos\alpha$.

Assim, uma das dimensões do paralelogramo é $\dfrac{MP}{sen\alpha} = \dfrac{b \cdot \cos\alpha}{sen\alpha}$ e a altura correspondente é $a \cdot \cos\alpha$.

Logo a área do paralelogramo é $1(a \cdot \cos\alpha)\left(\dfrac{b \cdot \cos\alpha}{sen\alpha}\right) = \dfrac{ab\cos^2\alpha}{sen\alpha}$.

Sendo a área de *ABCD* igual a $ab \cdot sen\alpha$, temos

$$ab \cdot sen\alpha = \frac{ab \cdot \cos^2\alpha}{sen\alpha} \Leftrightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 \Leftrightarrow tg^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

20. (B) Se $\left(2+\sqrt{2}\right)^3\left(3-\sqrt{2}\right)^4=a+b\sqrt{2}$, sendo a e b inteiros, então

$\left(2-\sqrt{2}\right)^3\left(3+\sqrt{2}\right)^4=a-b\sqrt{2}$. Logo

$\left(2+\sqrt{2}\right)^3\left(3-\sqrt{2}\right)^4+\left(2-\sqrt{2}\right)^3\left(3+\sqrt{2}\right)^4=\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(a-b\sqrt{2}\right)=2a$,

que é um inteiro par.

21. (C) Temos $A=10^{(\log_{10}2005)^2}=\left(10^{\log_{10}2005}\right)^{\log_{10}2005}=2005^{\log_{10}2005}$. Logo

$$\log_{10}2005>\log_{10}1000=3\Leftrightarrow 2005^{\log_{10}2005}>2005^3\Leftrightarrow A>B$$

Além disso,

$$2005>1936=44^2\Leftrightarrow\sqrt{2005}>44$$
$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2005}}>2^{44}=\left(2^{11}\right)^4=2048^4>2005^4>2005^{\log_{10}2005}$$
$$\Rightarrow C>A$$

Logo $B<A<C$.

22. Alternativa Anulada

Solução:

O tempo de percurso é minimizado quando se trafega o maior trecho a velocidades maiores e o menor trecho a velocidades menores e maximizado quando se trafega o maior trecho a velocidades menores e o menor trecho a velocidades maiores. Assim, o tempo total gasto pelo piloto nos três trechos é no mínimo $\frac{240}{40}+\frac{300}{75}+\frac{400}{80}=15$ horas e no máximo $\frac{240}{80}+\frac{300}{75}+\frac{400}{40}=17$ horas.

Assim, as respostas C) e D) estão corretas.

23. (B) Os números 7 e 11 são primanos, pois pertencem à progressão aritmética (3;7;11);

- 41 e 131 também são primanos, pois pertencem à progressão aritmética (41;71;101;131);
- 31 e 43 também são primanos, pois pertencem à progressão aritmética (31;37;43);
- 23 e 41 também são primanos, pois pertencem à progressão aritmética (23;41;59).
- A razão de uma progressão aritmética que contém 13 e 53 deve ser divisor da diferença 53 – 13 = 40, não podendo ser múltiplo de 3. Deste modo, entre três números consecutivos da progressão um deles é múltiplo de 3. De fato, sendo a – r, a e a + r tais três termos consecutivos, como r deixa resto 1 ou 2 quando dividido por 3, a – r, a e a + r deixam restos diferentes na divisão por 3 e, portanto, um dos três números é divisível por 3. Conseqüentemente, se 13 e 53 são primanos então um dos números da progressão aritmética com números primos que os contém é 3 ou –3, que são os únicos múltiplos de 3

primos. Testando ambos os casos, vemos que não obtemos uma progressão aritmética somente com primos. Logo 13 e 53 não são primanos.

24. **Alternativa Anulada**

Solução:

Vamos calcular o número de plins no intervalo (12h, 0h], e descontar os plins que ocorreram no último segundo depois.

Seja w a velocidade angular do ponteiro das horas. Então as velocidades angulares dos ponteiros dos minutos e dos segundos são $12w$ e $720w$. Vamos contar o número de plins entre cada par de ponteiros: Minutos/Horas: Do referencial do ponteiro das horas, ele está parado e o ponteiro dos minutos roda com velocidade angular $11w$ [*]. Como os dois começam juntos, e um ponteiro rodando a w completa uma volta no período, o ponteiro dos minutos completa 11 voltas nas 12 horas do problema. Logo há 11 plins gerados por encontros deste tipo.

Segundos/Horas: A velocidade relativa é $720w – w = 719w$, logo há 719 plins.

Segundos/Minutos: A velocidade relativa é $720w – 12w = 708w$, logo há 708 plins.

Logo, no total, há 11 + 719 + 708 = 1438 plins.

Descontando os três plins ocorridos às 0h, há, no total, 1435 plins no período de 12h1s a 23h59m59s.

25. (C) Suponha que haja alunos de 4 ou mais nacionalidades entre os 9 alunos da classe. Se escolhermos um aluno de cada nacionalidade não haverá dois alunos de mesma nacionalidade, o que é um absurdo. Logo há alunos de no máximo 3 nacionalidades.

Da mesma forma, entre os 9 alunos não há 4 de mesma nacionalidade, pois se houvesse poderíamos formar um grupo de 5 alunos com mais de 3 alunos de mesma nacionalidade. Logo há no máximo 3 alunos de cada nacionalidade.

Como há 9 alunos, no máximo 3 nacionalidades e no máximo 3 alunos por nacionalidade, há exatamente 3 nacionalidades e 3 alunos de cada nacionalidade. Em particular, há 3 alunos brasileiros.