XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)

GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) A	6) C	11) B	16) A	21) E
2) C	7) E	12) D	17) E	22) D
3) A	8) E	13) B	18) D	23) B
4) A	9) E	14) E	19) B	24) Anulada
5) A	10) D	15) A	20) B	25) D

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Deve ser atribuído 1 ponto para todos os alunos na questão anulada.**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1) (A) Marque os ângulos opostos pelo vértice a x e a y. No pentágono com esses ângulos OPV marcados, a soma dos ângulos internos será igual a 540º: $x + y$ + 90º + 90º + 90º = 540º, então $x + y$ = 270º.

2) (C) Os únicos números que não interessam são aqueles em que todos os dígitos vizinhos possuem paridades diferentes: par-ímpar-par-ímpar ou ímpar-par-ímpar-par. Para o primeiro tipo, temos 4.5.5.5 = 500 números (não pode começar em zero!). Para o segundo tipo, temos 5.5.5.5 = 625 números. Esses são os números que não são peroba, então os demais números de 4 dígitos são peroba: 9000 – 1125 = 7875 números peroba.

3) (A) Note que $(x^2+x)(x^2+5x+6)=x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$.
Seja $y=x^2+3x$. Então $1+y(y+2)=181^2 \Leftrightarrow (y+1)^2=181^2 \Leftrightarrow y+1=181 \Leftrightarrow y=180$.

4) (A) A face 1 estará, no início, voltada para Leste e, a seguir, voltada para baixo. Quando o 2 estiver para baixo, 1 estará a Oeste. Quando o 3 estiver para baixo, 1 continua a Oeste. Quando o 5 estiver para baixo (face oposta ao 2), o 1 permanece a Oeste e assim termina após os movimentos.

5) (A) Se os números estão agrupados em duplas de mesmo produto cada, então o maior e o menor devem estar juntos: 5 e 72, de onde tiramos que o produto de cada dupla deve ser 360. Assim, 10 deve formar dupla com o 36.

6) (C) As tintas pretas refletem 3% da luz. A tinta nova desenvolvida reflete 1/10 desse valor, ou seja, reflete 0,3% da luz, absorvendo o resto, que corresponde a 99,7%.

7) (E) Se $200\ldots07=3\times3\times22\ldots23$ deve ser múltiplo de 81, o número 22...23 deve ser múltiplo de 9. Perceba que número de algarismos zero em 200...07 é o mesmo número de algarismos 2 em 22...23, assim o problema se resume a verificar a divisibilidade de 22...23 por 9, ou seja, quando $2\times z+3$ é múltiplo de 9, sendo z o número de zeros de 200...07. Isso se verifica para o número 20.000.000.000.007, com 12 zeros.

8) (E) Escreva novamente a soma, agora com as parcelas na ordem inversa:

$$\frac{n^4-4}{n^4}+\frac{n^4-5}{n^4}+\frac{n^4-6}{n^4}+\ldots+\frac{6}{n^4}+\frac{5}{n^4}+\frac{4}{n^4}$$

Some com a expressão do enunciado, calculando primeiro a soma das primeiras parcelas, depois das segundas, terceiras e assim por diante. Obtemos n^4-7 parcelas iguais, cujo valor numérico já é conhecido:

$$\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^4}{n^4}+\ldots+\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^4}{n^4}=618 \Leftrightarrow \left(n^4-7\right)\frac{n^4}{n^4}=618 \Leftrightarrow n^4=625 \Leftrightarrow n=5$$

9) (E) Sendo r o raio do semicírculo e h a altura do triângulo em relação à base, cujo comprimento $2r$, sabemos que as áreas são iguais: $\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}2r.h \Leftrightarrow \pi r=2h$. Mas $\text{tg } x^{\circ}=\frac{h}{r}$, e da igualdade das áreas tiramos $\frac{h}{r}=\frac{\pi}{2}$.

10) (D) Os quadrados perfeitos necessários para verificar as alternativas são: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. Vamos fazer uma tabela com a soma de cada dois deles e verificar qual o primeiro inteiro que ocorre como soma de dois pares distintos de quadrados perfeitos (só precisamos de uma parte da tabela):

	1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**
1	2	5	10	17	26	37	**50**	65
4	5	8	13	20	29	40	53	68
9	10	13	18	25	34	45	58	73
16	17	20	25	32	41	52	65	80
25	26	29	34	41	**50**	61	74	89
36	37	40	45	52	61	72	85	100
49	50	53	58	65	74	85	98	113
64	65	68	73	80	89	100	113	128

Encontramos o número 50 como o menor deles.

11) (B) Retirando-se um A, devemos achar anagramas de BACAN que começam com A, que são 4!=24. Retirando-se um B, devemos achar anagramas de ACANA que começam com A, que são 4!/2!=12. Retirando-se C ou N, obtemos também 12 anagramas começados com A. Esses anagramas obtidos são quase-anagramas de BACANA, um total de 60 quase-anagramas.

12) (D) O tempo que Rubens levaria com maior velocidade pelo caminho maior é o mesmo que ele levaria com velocidade normal pelo menor caminho: $\frac{AB+AC}{1{,}24v}=\frac{BC}{v} \Leftrightarrow AB+AC=\frac{31}{25}BC$.

Como $AB^2+AC^2=BC^2$,

$$\left(AB+AC\right)^2=\left(\frac{31}{25}BC\right)^2 \Leftrightarrow AB^2+2AB.AC+AC^2=\frac{31^2}{25^2}\left(AB^2+AC^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{336}{25^2}AB^2-2AB.AC+\frac{336}{25^2}AC^2=0$$

Dividindo por AC^2 e supondo que ACB é o menor ângulo: $\frac{168}{25^2}x^2 - x + \frac{168}{25^2} = 0$, com $x = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC}$. $x = \frac{1-\sqrt{1-4.(168/625)^2}}{2.168/625} = \frac{625-\sqrt{961.289}}{336} = \frac{7}{24}$.

Finalmente, $\frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$.

13) (B) Somando as equações e juntando partes fracionárias com partes inteiras obtemos $x + y + z = 4,9$. Extraindo as possíveis partes fracionárias das equações dadas e dessa nova obtida, temos as seguintes possibilidades: $\{x\}+\{z\}=0,2$ ou 1,2; $\{y\}+\{x\}=0,6$ ou 1,6; $\{z\}+\{y\}=0$ ou 1; $\{x\}+\{y\}+\{z\}=0,9$ ou 1,9 ou 2,9.

Se $\{z\}+\{y\}=0$, teríamos $\{y\}=\{z\}=0$, o que não fornece solução. Assim, $\{z\}+\{y\}=1 \Rightarrow \{x\}=0,9$; $\{y\}=0,7$; $\{z\}=0,3$. Reescrevendo o sistema para as variáveis, temos $x+y=4,6$; $x+z=2,2$; $y+z=3 \Rightarrow x-y+z=1,9-2,7+0,3=-0,5$.

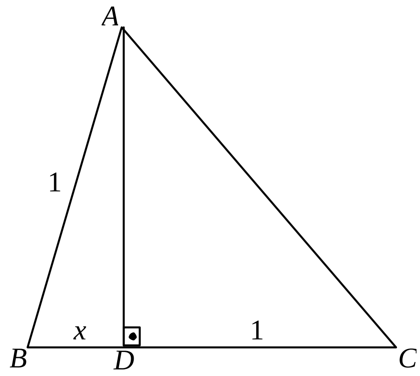
14) (E) Um repunit de n dígitos pode ser escrito como $\frac{10^n-1}{9}$. Assim, se o polinômio aplicado a qualquer repunit resulta num repunit: $p\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + q\frac{10^n-1}{9} + r = \frac{10^m-1}{9} \Leftrightarrow$

$p(10^n-1)^2 + 9q(10^n-1) + 81r = 9(10^m-1) \Leftrightarrow p.10^{2n} + 10^n(9q-2p) + p - 9q + 81r = 9.10^m - 9$

$\Leftrightarrow p + \frac{(9q-2p)}{10^n} + \frac{p-9q+81r}{10^{2n}} = 9.\frac{10^m}{10^{2n}} - \frac{9}{10^{2n}}$. Para n suficientemente grande, o lado esquerdo torna-se arbitrariamente próximo de p e o lado direito fica arbitrariamente próximo de 9.10^{m-2n}, $m \ge 2n$ (lembre que m é uma função de n). Assim, p deve ser igual a 9.10^{m-2n} e, portanto, da forma $9\cdot 10^k$, k inteiro não negativo. Além disso, $m = 2n + k$. Deste modo, fazendo as substituições, obtemos $(9q-2p) + \frac{p-9q+81r}{10^n} = -\frac{9}{10^n}$. Note que para n suficientemente grande, o lado esquerdo tende a $9q - 2p$ e o lado direito, a zero. Logo $9q - 2p = 0$ e, conseqüentemente, $q = 2\cdot 10^k$. Substituindo mais uma vez, obtemos $r = \frac{2\cdot 10^k - 2}{9}$. Assim, um valor possível para q é 2, obtido para $k = 0$.

15) (A) A solução deve satisfazer a condição de existência $x \ge 0$. Assim, $x = y^2$: $x = \sqrt{x} + c \Leftrightarrow y^2 - y - c = 0$, $\Delta = 1 + 4c$ e devemos ter $\Delta \ge 0$ para haver solução real. $1 + 4c \ge 0 \Leftrightarrow c \ge -1/4$. Deveremos ter uma raiz não negativa em y, o que ocorre porque a equação mostra que a soma das raízes é 1.

16) (A)



Pelo teorema de Pitágoras, $AD = \sqrt{1-x^2}$. Assim, a área do triângulo ABC é $\dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{1}{2}(1+x)\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3(1-x)}$.

Pela desigualdade das médias,

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1+x}{3}\right)\left(\frac{1+x}{3}\right)\left(\frac{1+x}{3}\right)(1-x)} \le \frac{\frac{1+x}{3}+\frac{1+x}{3}+\frac{1+x}{3}+1-x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{(1+x)^3(1-x)} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

e, portanto, o valor mínimo da área é $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, obtido quando $\dfrac{1+x}{3} = 1-x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

17) (E) Dividindo tudo por x^8: $1 + 3\dfrac{y^4}{x^8} = 4\dfrac{y^3}{x^6} \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^4 - 4\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^3 + 1 = 0$. Seja $z = \dfrac{y}{x^2}$: $3z^4 - 4z^3 + 1 = 0$. Fatorando, teremos $(z-1)^2(3z^2+2z+1) = 0$. A única raiz racional dessa equação é $z = 1$, portanto deveremos ter $y = x^2$ para satisfazer a equação com x e y inteiros positivos. Pela limitação $1 \le y \le 2007$, y pode assumir todos os valores de quadrados perfeitos nesse intervalo, que são $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 44^2$, totalizando 44 pares ordenados.

18) (D) Como nenhum deles pode ser igual a zero, temos a forma equivalente:

$a - b = \dfrac{1}{a}$, $b - c = \dfrac{1}{b}$, $c - a = \dfrac{1}{c}$, somando as equações teremos $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0 \Rightarrow$ $\dfrac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$.

Em outra forma equivalente: $a^2 = 1 + ab$, $b^2 = 1 + bc$, $c^2 = 1 + ac$. Multiplicando as equações:

$a^2b^2c^2 = (1+ab)(1+bc)(1+ca) \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2 = 1 + ab + bc + ca + a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 0 = 1 + a^2bc + ab^2c + abc^2$

$\Leftrightarrow abc(a+b+c) = -1$

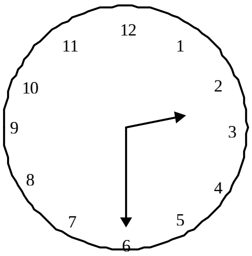
Observação: pode-se provar que o sistema admite seis soluções: $\pm\left(\frac{2\cos 40^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 80^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 160^\circ+1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm\left(\frac{2\cos 80^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 160^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 40^\circ+1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\pm\left(\frac{2\cos 160^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 40^\circ+1}{\sqrt{3}},\frac{2\cos 80^\circ+1}{\sqrt{3}}\right)$.

19) (B) Para ter menos de 5 andares, a soma dos algarismos do número do prédio deve ser menor que 5. As possibilidades são, do lado direito (par), 4, 22, 40, 12, 30, 2, 20, 10, 100. Do lado esquerdo (ímpar), são 13, 31, 3, 21, 11, 1. Temos então mais prédios com menos de 5 andares do lado direito da rua.

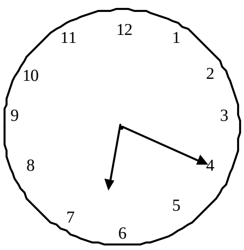
20) (B) A soma dos dois outros lados deve ser maior que $5\sqrt{3}/2$, de forma que o perímetro será maior que $5\sqrt{3}$. O menor inteiro x maior que $5\sqrt{3}$ deve ser o menor inteiro a satisfazer $\left(5\sqrt{3}\right)^2 \le x^2$, de onde tiramos $x = 9$.

21) (E) Para medir o ângulo entre os ponteiros, basta obter as posições dos dois ponteiros. Fazendo isso para cada um dos horários, lembrando que o ângulo entre dois números consecutivos do relógio é 30º:

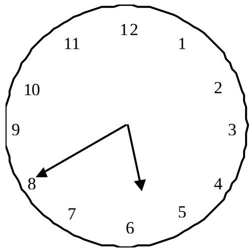
- 02h30: o ponteiro maior está sobre o 6 e o menor está exatamente na metade entre o 2 e o 3. Logo o ângulo entre eles será $3{,}5\times 30º = 105º$.



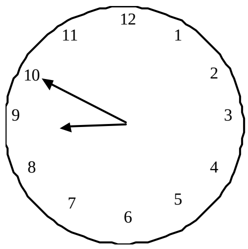
- 06h20: o ponteiro maior está sobre o 4 e o menor está 1/3 de hora depois do 6. Logo o ângulo é $\left(2+\frac{1}{3}\right)\times 30º = 70º$.



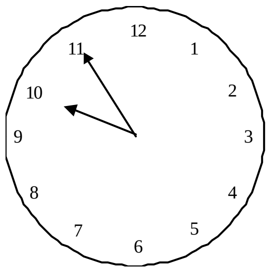
- 05h40: o ponteiro maior está sobre o 8 e o menor está 1/3 de hora antes do 6. Logo o ângulo é $\left(2+\frac{1}{3}\right)\times 30º = 70º$.



- 08h50: o ponteiro maior está sobre o 10 e o menor está 1/6 de hora antes do 9. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{6}\right)\times 30^{\circ}=35^{\circ}$.



- 09h55: o ponteiro maior está sobre o 11 e o menor está 1/12 de hora antes do 10. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 30^{\circ}=32{,}5^{\circ}$.

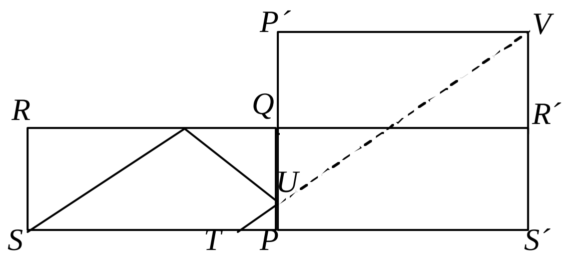


22) (D) Sendo d o mdc destes números, temos que $d \mid 2332 - 1221 = 1111 = 11\times 101$. Como 101 é primo, 101 não divide 1221 e 11 divide todos os 8 números, 11 é o *mdc* procurado.

23) (B) Sejam B e C os pontos de batida da bola em PQ e QR, respectivamente, e A o ponto onde a bola está inicialmente. Como os ângulos das trajetórias de batida com a mesa são iguais, deveremos ter os triângulos APB, CQB e CRS semelhantes. Seja $BP = x$. Assim:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{CQ}{3-x}\Leftrightarrow CQ=\frac{3}{x}-1\ ,\quad \frac{AP}{BP}=\frac{CR}{RS}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{7-3/x}{3}\Leftrightarrow 3=7x-3\Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$$

Outra Solução:



Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, ao refletirmos o retângulo inicial em relação ao lado PQ e em seguida refletindo em relação ao lado $QR´$, obtemos um segmento TUV, de acordo com a figura acima. Logo, pela semelhança dos triângulos TPU e $TS´V$, temos $\frac{TP}{TS´} = \frac{PU}{S´V} \Rightarrow \frac{1}{1+6} = \frac{PU}{6} \Rightarrow PU = \frac{6}{7}$.

24) (Anulada) Os únicos números com essa propriedade são: 110, 121, 152, 240, 251, 282 e 390. A diferença entre o maior e o menor é 280, que é múltiplo de 7 e, além disso, 2 + 8 + 0 = 10. (Há duas alternativas corretas).

25) (D) Os primeiros termos dessa seqüência são: 1, 3, 7, 15, 13, 9, 19, 21, 7, 15, ..., de onde vemos que ela tem período 6 a partir do 3º termo. Assim, $a_{31} = a_{25} = a_{19} = a_{12} = a_7 = 19$, $a_{32} = a_8 = 21$, $a_{33} = 7$, $a_{34} = 15$ e $a_{35} = 13$. A soma tem valor 19 + 21 + 7 + 15 + 13 = 75.