CAPÍTULO **1**

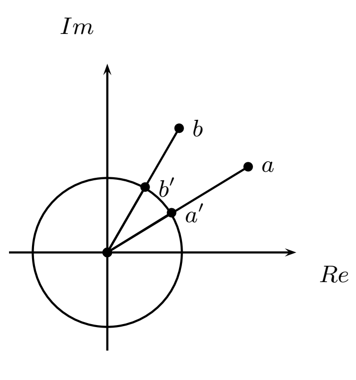
Geometria com Números Complexos

A partir de agora vamos aprender a usar os números complexos na geometria plana. Os números complexos são muito mais do que vetores, eles formam um corpo. Desse modo podemos somá-los, multiplicá-los, observar seu módulo,... e tudo isso sem sair do plano complexo. Essas propriedades extras que vamos usar a nosso favor durante o estudo desse capítulo.

1.1 Ângulos

Uma grande vantagem dos complexos sobre vetores é a possibilidade de se trabalhar com ângulos. Porém devemos nos lembrar que no plano complexo trabalhamos com ângulos orientados, ou seja $\angle ABC = -\angle CBA$. O próximo problema irá determinar uma fórmula para achar ângulos.

▶ **Problema.** Dados $a, b \in \mathbb{C}$ ache o ângulo $\angle a0b$.



Sejam $a' = a/|a|$ e $b' = b/|b|$ Ou seja a' e b' são os pontos onde as retas $0a$ e $0b$ encontram o círculo unitário. Agora note que:

$\arg(a) = \arg(a') = \alpha$ e $\arg(b) = \arg(b') = \beta$

Usando a fórmula de Euler, sabemos que:

$$\frac{b'}{a'} = e^{i(\beta - \alpha)} \qquad \text{ou seja:}$$

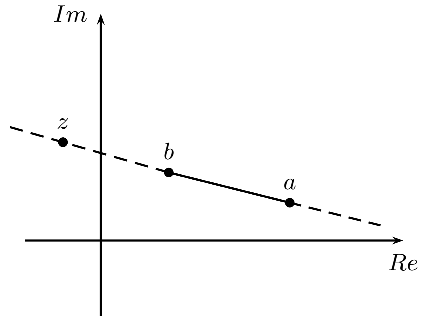
$$\boxed{\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg b - \arg a}$$

Para achar o ângulo $\angle abc$ basta aplicar uma translação $-b$ e cair no caso anterior. Dessa forma obtemos a seguinte relação: $\angle abc = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)$.

1.2 Equação da Reta

Outra ferramenta necessária para fazer problemas de geometria é saber a equação de uma reta que passa por dois pontos fixados.

▶ **Problema.** Dados dois pontos $a, b \in \mathbb{C}$ como achar a equação da reta que passa por a e b?



$z - a = \lambda(b - a)$, onde λ é um real

$$\overline{z} - \overline{a} = \lambda(\overline{b} - \overline{a})$$

$$\Rightarrow \frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

Essa equação pode parecer um pouco estranha, mas olha que acontece quando tomamos a, b no circulo unitário, ou seja quando $a^{-1} = \overline{a}$ e $b^{-1} = \overline{b}$:

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

Fazendo as contas obtemos:

$$\boxed{z + \overline{z}ab = a + b}$$

Observações:

i. O conjunto de retas $z + \overline{z}ab = k$, onde $k \in \mathbb{C}$ é o conjunto de retas paralelas à reta ab.

ii. As retas $z - \overline{z}ab = k$ são o conjunto de retas perpendiculares à reta ab

iii. A equação da reta tangente ao disco unitário em $c \in \mathbb{C}$ é dada por $z + \overline{z}c^2 = 2c$

iv. Se a e b são unitários, os pontos médios dos arcos a^2b^2 são ab e $-ba$.

Para resumir as idéias da duas últimas seções vamos resolver o seguinte problema que apareceu em um dos teste de seleção do Irã para a IMO de 2004.

Problema 1. Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Uma reta r passando por O, corta AB e AC em M e N respectivamente. Seja S o ponto médio de BN e R o de CM. Mostre que $\angle ROS = \angle BAC$

Solução. Sejam $0, a, b, c$ as coordenadas complexas dos pontos O, A, B, C, respectivamente. Suponha sem perca de generalidade que a equação da reta r seja $z - \overline{z} = 0$. Sabemos que a retas AB é dada por $z + \overline{z}ab = a + b$. Como $M \in r \cap AB$, temos que: $m + \overline{m}ab = a + b$ e $m - \overline{m} = 0$. Fazendo uma substituição, encontramos que $m = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

De modo análogo, podemos achar que $n = \dfrac{a+c}{1+ac}$. Daí, usando o fato de R e S serem pontos médios, obtemos:

$$2r = \frac{a+b+c+abc}{1+ab} \qquad \text{e} \qquad 2s = \frac{a+b+c+abc}{1+ac}$$

Assim, $\angle ROS = \arg\left(\dfrac{r}{s}\right) = \arg\left(\dfrac{1+ab}{1+ac}\right)$ e como $\angle BAC = \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)$. Para mostrar que $\angle ROS = \angle BAC$, devemos mostrar que:

$$\omega = \frac{1+ab}{1+ac} \cdot \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$$

Como os ângulos $\angle ROS$ e $\angle BAC$ são menores que $180°$, basta mostrar que ω é real, ou seja, que $\omega = \overline{\omega}$:

$$\omega = \overline{\omega} \Leftrightarrow \frac{1+ab}{1+ac} \cdot \frac{c-a}{b-a} = \frac{1+\frac{1}{ab}}{1+\frac{1}{ac}} \cdot \frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1+ab}{ab}}{\frac{ac+1}{ac}} \cdot \frac{\frac{a-c}{ac}}{\frac{a-b}{ab}}$$

□

1.3 Pontos Notáveis

Como os números complexos são vetores as coordenadas do baricentro e do ortocentro são análogas às encontradas na geometria vetorial. As coordenadas do incentro e dos excentros podem ser obtidas a partir da equação do ponto médio do arco a^2b^2. Para descobrir o circuncentro, use $o(a+b) \perp ab$.

- Baricentro: de um $\triangle abc$ qualquer $g = \dfrac{a+b+c}{3}$

- Circuncertro: de um $\triangle abc$ qualquer $o = \dfrac{|a|^2(b-c)+|b|^2(c-a)+|c|^2(a-b)}{\overline{a}(b-c)+\overline{b}(c-a)+\overline{c}(a-b)}$
- Ortocentro: de um $\triangle abc$ qualquer $h = a+b+c-2o$ (o circuncentro)
- Incentro: de um $\triangle a^2b^2c^2$ inscrito no circulo unitário é $i = -ab-bc-ca$
- Excentro: de um $\triangle a^2b^2c^2$ inscrito no circulo unitário é $e_a = -bc+ca+ab$

Cuidado! Quando temos quatro pontos unitários $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ não podemos afirmar que os incentros dos triângulos $a^2b^2c^2$ e $b^2c^2d^2$ são simultaneamente $i_1 = -ab-bc-ca$ e $i_2 = -bc-cd-db$. Pois, antes de deduzir esta fórmula, inicialmente escolhemos a, b, c de modo que os pontos médios interiores tenham sempre o sinal de menos. Isso pode ser feito sem perca de generalidade apenas quando temos três ou dois pontos.

1.4 Medidas e Semelhanças

Agora vamos observar o comportamento dos complexos ao serem visto como um espaço métrico. Como já sabemos; a medida do segmento ab, com $a, b \in \mathbb{C}$ é dada por $|b-a|$. E como um fato tão simples pode nos ajudar? Basta usar a *desigualdade triangular*:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $z_1, z_2, ..., z_n$ são todos colineares.

Outra forma de usar o módulo é na semelhança de triângulos. Sabemos que os triângulos $\triangle w_1w_2w_3$ e $\triangle z_1z_2z_3$ são semelhantes se e somente se as razões entre as medidas entre os lados correspondentes são iguais e o ângulo entre eles também for o mesmo. Ou seja:

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right| = \left|\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}\right| \qquad e \qquad \arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \arg\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quando os triângulos são semelhantes mas possuem diferentes orientações podemos obter uma fórmula similar:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & \overline{w_2} & 1 \\ z_3 & \overline{w_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício: Use a fórmula acima para achar a equação da mediatriz do segmento ab.

1.5 Transformações Geométricas

Nesta seção vamos abordar apenas as duas transformações que podem oferecer ao aluno um pouco de dificuldade. São elas: reflexão por uma reta e rotação. A reflexão por um ponto e a translação apesar de serem bastante usadas, possuem contas fáceis de ser efetuadas.

- *Reflexão*: Dada a reta $r : z + \overline{z}m = n$ e um ponto $w \in \mathbb{C}$ determine o ponto v que é imagem de w sobre r.

  Como a reta wv é perpendicular à reta r a sua equação é dada pela fórmula: $z - \overline{z}m = k$. Daí, $w - \overline{w}m = v - \overline{v}m$, ou seja $\overline{v}m = v + \overline{w}m - w$. Por outro lado, sabemos que o ponto médio de wv está sobre r assim: $w + v + (\overline{w} + \overline{v})m = 2n$. Efetuando as contas obtemos que:

  $$\boxed{v = n - \overline{w}m}$$

- *Rotação*: Dados $a, w \in \mathbb{C}$ e um ângulo θ determine as coordenadas de v de modo que $|v - a| = |w - a|$ e $\angle wav = \theta$.

  Após aplicar uma translação $-a$ fica fácil ver que:

  $$\boxed{v = (w - a)e^{i\theta} + a}$$

1.6 Áreas

Da geometria plana, sabemos que a área de um triângulo com vértices 0, z_1 e z_2 é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2}|z_1||z_2| \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

Traduzindo essa equação para os complexos ficamos com $A = \frac{1}{2}\Im(z_2\overline{z_1})$. Agora, se o triângulo tiver vértices z_1, z_2 e z_3 basta fazer uma translação $-z_3$ e aplicar a última fórmula. Desse modo, obtemos $[z_1z_2z_3] = \frac{1}{2}\Im(z_2\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + z_1\overline{z_3})$. Para generalizar para um polígono convexo, tome um ponto no seu interior como a origem (se não for, faça uma translação!). Com isso, a área de um polígono convexo $z_1z_2...z_n$ é dada por:

$$S_n = \frac{1}{2}\Im(z_2\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + \cdots + z_1\overline{z_n})$$

1.7 Desigualdade Triangular

1. (Romênia 2004) Considere o triângulo ABC e O um ponto no seu inteiror. As retas OA, OB, OC encontram os lados do triângulo nos pontos A_1,

B_1, C_1, respectivamente. Sejam R_1, R_2, R_3 os circunraios dos triângulos OBC, OCA, OAB, respectivamente e R o circunraio do triângulo ABC. Prove que

$$\frac{OA_1}{AA_1}R_1 + \frac{OB_1}{BB_1}R_2 + \frac{OC_1}{CC_1}R_3 \geq R.$$

2. (Teorema Ptolomeu) Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Mostre que:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $ABCD$ é cíclico.

3. Sejam P e Q dois pontos no plano do triângulo ABC. Mostre que:

$$BC \cdot PA \cdot QA + CA \cdot PB \cdot QB + AB \cdot PC \cdot QC \geq BC \cdot CA \cdot AB.$$

1.8 Problemas Propostos

1. Na geometria analítica a equação do círculo que passa por três pontos não colineares (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) é dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ache uma fórmula correspondente para o plano complexo.

2. *(Napoleão)* Sobre cada lado de um triângulo, desenhe um triângulo eqüilátero (no exterior). Prove que os baricentros desses três triângulos eqüiláteros são vértices de um outro de triângulo eqüilátero.

3. *(IME)* Seja ABC um triângulo e P, Q, S as interseções das tangentes ao circuncírculo nos vértices com as extensões dos respectivos lados opostos. Mostre que os pontos P, Q, R são colineares.

4. *(Romênia 2002)* Seja $ABCDE$ um pentágono inscrito em uma circunferência de centro O que tem ângulos $\angle B = 120°$, $\angle C = 120°$, $\angle D = 130°$ e $\angle E = 100°$. Mostre que as diagonais BD e CE se encontram em um ponto de AO.

5. *(Banco IMO 1998)* Seja ABC um triângulo, H seu ortocentro, O o seu circuncentro e R o circunraio. Seja D a reflexão de através de BC, E a reflexão de B através de CA e F a reflexão de C através de AB. Prove que D, E, F são colineares se e somente se $OH = 2R$.

6. *(Banco IMO 1998)* Seja $ABCDEF$ um quadrilátero tal que $\angle B + \angle D + \angle F = 360°$ e $\frac{AB}{BC}\frac{CD}{DE}\frac{EF}{FA} = 1$. Prove que $\frac{BC}{CA}\frac{AE}{EF}\frac{FD}{DB} = 1$.

7. *(Banco IMO 1998)* Seja ABC um triângulo tal que $\angle ACB = 2\angle ABC$. Seja D um ponto sobre o lado BC tal que $CD = 2BD$. O segmento AD é estendido até E tal que $AD = DE$. Prove que $\angle ECB + 180° = 2\angle EBC$.

8. *(Torneio das Cidades)* Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com orientações distintas. Mostre que os pontos médios dos segmentos AA', BB', CC' são colineares.

9. *(Banco IMO 1992)* Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AC = BD$. Triângulos eqüiláteros são construídos externamente sobre os lados do quadrilátero. Prove que os segmentos ligando os baricentros dos triângulos opostos são perpendiculares.

10. *(Putnam 1967)* Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em uma circunferência de raio r de modo que $AB = CD = EF = r$. Prove que os pontos médios dos segmentos BC, DE, FA são vértices de um triângulo eqüilátero.

11. *(OBM 2003)* Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G, H pontos sobre os lados AB, BC, CD, DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

12. *(IMO 1993)* Um ponto D é escolhido dentro de um triângulo escaleno ABC tal que $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ e $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Encontre o valor de $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

13. *(Leningrado 1991)* A corda AB divide um círculo em dois arcos cujos pontos médios são M e N. Uma rotação sobre A por um ângulo θ leva B em B' e M em M'. Prove que os segmentos que ligam o ponto médio de BB' com os pontos M' e N são perpendiculares.

14. *(Leningrado 1991)* O ponto P está fora de um círculo de centro O. A reta l_1 passando por P é tangente ao círculo em A e a reta l_2 que também passa por P corta o círculo nos pontos B e C. As tangentes ao círculo passando por B e C se encontram em X. Prove que $AX \perp PO$.

15. *(MOP)* Seja H o ortocentro do triângulo ABC. O círculo de diâmetro CH intercepta os lados BC e AC nos pontos P e Q respectivamente. Mostre que as tangentes a esse círculo nos pontos P e Q interceptam-se no ponto médio de AB.

16. *(Romênia 1999)* O incírculo do $\triangle ABC$ toca os lados BC, CA, AB em A_1, B_1, C_1 respectivamente. Seja K o ponto no incírculo diametralmente oposto a C_1 e D o ponto de encontro das retas B_1C_1 e A_1K. Prove que $CD = CB_1$.

17. *(Irã 1995)* Sejam M, N, P os pontos de interseção do incírculo do $\triangle ABC$ com os lados BC, CA, AB, respectivamente. Prove que o ortocentro do $\triangle MNP$, o incentro do $\triangle ABC$ e o circuncentro do $\triangle ABC$ são colineares.

18. *(Russia 1997)* O incirculo do $\triangle ABC$ toca os lados AB, BC, CA em M, N, K, respectivamente. A reta por A e paralela à NK encontra MN em D. A reta por A e paralela a MN corta NK em E. Mostre que DE bissecta os lados AB e AC.

19. *(Russia 2003)* No triângulo isósceles ($AB = BC$) a base média relativa a BC intersecta se incírculo no ponto F (que não está sobre AC). Prove que a tangente ao incírculo por F corta a bissetriz do ângulo $\angle C$ em um ponto sobre AB.

20. *(Iugoslávia 1992)* Três quadrados $ACGF$, $CBED$ e $ABHI$ são constrídos exteriormente aos lados do triângulo ABC. Sejam, $CDQG$ e $BEPH$ paralelogramos. Prove que o triângulo PAQ é isósceles e retângulo.

21. Em um quadrilátero convexo $ABCD$, O é encontro das diagonais. Sejam S_1 e S_2 os baricentros dos triângulos AOB e COD e H_1 e H_2 os ortocentros dos triângulos BOC e DOA. Mostre que $H_1H_2 \perp S_1S_2$.

22. *(Irã 2003)* Sejam P e Q pontos sobre os lados BC e DC, respectivamente de um quadrilátero convexo $ABCD$ tais que $\angle BAP = \angle DAQ$. Prove que $[ABP] = [ADQ]$ se e somente se a reta que liga os ortocentros destes triângulos é perpendicular à reta AC.

Referências:

[1] Edmilson Motta, *Aplicações dos números complexos à geometria*, Eureka! 6

[2] Liang - Shin Hahn, *Complex numbers & Geometry*, MAA - 1994