Geometria...!

Deborah Barbosa Alves
deborah.alves@gmail.com

Problema 1. Seja ABC um triângulo de perímetro 4, e X e Y pontos nas retas AC e AB respectivamente tais que $AX = AY = 1$. Seja P a interseção de XY e BC. Prove que o perímetro de ABP ou o perímetro de APC é 2.

Problema 2. Seja ABC um triângulo e S uma circunferência tangente aos lados CA e CB em D e E, respectivamente, e tangente internamente ao circuncírculo do $\triangle ABC$. Prove que o incentro do $\triangle ABC$ é o ponto médio de DE.

Problema 3. Seja ABC um triângulo de incentro I tal que seu incírculo toca os lados BC, AC e AB em D, E e F respectivamente. Seja P a interseção de DI e EF e M o ponto médio do lado BC. Prove que A, P e M são colineares.

Problema 4. Seja Γ uma circunferência e P um ponto externo a Γ. As tangentes a Γ por P tocam Γ em A e B. Sejam C e D pontos em Γ tal que P está na reta CD e seja M o ponto médio de AB. Prove que $\angle CMB = \angle DMB$.

Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrilátero bicêntrico de incentro I e circuncentro O, e seja X a interseção das diagonais AC e BD. Prove que I, O e X são colineares.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncírculo Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ, e ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas na reflexão de ℓ pelos lados BC, CA, e AB respectivamente.
Mostre que o circuncírculo do triángulo formado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente ao círculo Γ.

Problema 7. (OBM 2013) O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.

Problema 8. (RMMS 2011) Um triângulo ABC está inscrito num círculo ω. Uma reta variável l paralela a BC intersecta os segmentos AB e AC nos pontos D e E respectivamente, e intersecta ω nos pontos K e L (onde D está entre K e E). O círculo γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e também tangente a ω, enquanto o círculo γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e também tangente a ω. Determine o lugar geométrico, enquanto l varia, do encontro das tangentes internas comuns a γ_1 e γ_2.

Problema 9. Seja I o incentro do triângulo ABC. Sejam A_1 e A_2 pontos sobre o lado BC tais que $\angle BIA_1 = \angle CIA_2 = 90^o$, B_1 e B_2 pontos sobre o lado AC tais que $\angle CIB_1 = \angle AIB_2 = 90^o$, e C_1 e C_2 pontos sobre o lado AB tais que $\angle AIC_1 = \angle AIC_2 = 90^o$. Sejam A', B' e C' os pontos médios dos arcos BC, AC e AB (que não contém o outro vértice) do circuncírculo do triângulo ABC, respectivamente. A reta $A'A_1$ corta AC em A_1', a reta $A'A_2$ corta AB em A_2', a reta $B'B_1$ corta AB em B_1', a reta $B'B_2$ corta BC em B_2', a reta $C'C_1$ corta BC em C_1' e a reta $C'C_2$ corta AC em C_2'. Prove que $A_1'A_2'$, $B_2'B_2'$ e $C_1'C_2'$ são concorrentes.