Geometria

Prof. Thiago Costa

1. Seja ABC um triângulo de alturas AD, BE e CF, com D, E e F sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente e seja M o ponto médio do lado BC. O circuncírculo do triângulo AEF corta a reta AM nos pontos A e X. As retas AM e CF se cortam em Y e a intersecção das retas AD e BX é o ponto Z. Prove que as retas YZ e BC são paralelas.

2. Seja P um ponto diferente do ortocentro do triângulo acutângulo ABC. Prove que as quatro circunferências passando pelos pontos médios dos triângulos PAB, PAC, PBC e ABC e a circunferência passando pelas projeções ortogonais de P aos lados de ABC possuem um ponto comum a todas elas.

3. Seja ABC um triângulo onde $1 < \dfrac{AB}{AC} < \dfrac{3}{2}$ e sejam M e N pontos sobre AB e AC de modo que $\dfrac{MB}{AC} - \dfrac{NC}{AB} = 1$. Prove que conforme M e N variam, o circuncírculo do triângulo AMN sempre passa por um mesmo ponto, mas diferente de A.

4. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito numa circunferência. Os pontos P e Q são simétricos a C com relação às retas AB e AD, respectivamente. Prove que a reta PQ passa pelo ortocentro H do triângulo ABD.

5. um triângulo retângulo ABC de hipotenusa AB está inscrito numa circunferência. Suponha que K seja o ponto médio do arco BC que não contém A, N seja o ponto médio do AC e que M é o ponto de intersecção da semirreta KN com a circunferência. As tangentes à circunferência passando por A e C se encontram em E. Prove que $\angle EMK = 90°$.

6. Num triângulo acutângulo ABC, trace as alturas AH_A, BH_B e CH_C. Considere então o ortocentro de cada um dos triângulos AH_BH_C, BH_AH_C e CH_AH_B. Mostre que estes pontos formam um triângulo congruente ao triângulo $H_AH_BH_C$.