Olimpíada Brasileira de Matemática

X semana olímpica – 21 a 28 de janeiro de 2007

Eduardo Poço

Invariantes – Nível I

Em muitos problemas com situações de liberdade, por exemplo de escolher números de um conjunto e substitui-los por outro, é de grande utilidade observar quantidades que não se alteram, ou que se alterem segundo algum padrão especial, para saber como as coisas estarão no futuro.

Um invariante é uma quantidade ou tendência que não se altera durante o desenvolvimento de uma situação. Assim, a todo momento, ele deverá estar constante apesar das operações já realizadas.

Exemplo: Temos uma caixa com cartões numerados de 1 a 100. A seguinte operação é permitida: retiramos 2 cartões da caixa, escrevemos a diferença deles em outro cartão e devolvemos o cartão com a diferença para a caixa. Os 2 cartões que foram retirados são jogados fora. Fazemos essa operação até que reste apenas 1 cartão na caixa. Prove que o número escrito nesse último cartão é par.

Vamos tentar generalizar!

Exemplo: Um computador tem na memória números $1,2,3,\ldots,24$. Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: deletam-se dois números quaisquer a e b e o número $\sqrt{a^2+b^2}$ é colocado na memória. Quais os possíveis números que podem sobrar?

O truque aqui é considerar $\sum_{m\in M} m^2$, sendo M o "conjunto" dos números na memória do computador. Colocamos entre aspas porque, nesse caso, pode haver números repetidos na memória, então ele aparecerá mais vezes no "conjunto". Sejam $a,b\in M$. Caso sejam escolhidos esses números para realizar a operação, os termos correspondentes na soma, a^2+b^2, serão substituídos por $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$, assim a soma considerada permanece constante durante as operações, que podem ser feitas em qualquer ordem. Logo, ao final, o número satisfaz $x^2 = 1^2+2^2+\ldots+24^2$.

Generalizando, podemos considerar o invariante $\sum f(m)$ sobre os números presentes se f satisfaz $f(a)+f(b)=f(g(a,b))$, para todo a,b que possa aparecer, sendo $g(a,b)$ a operação permitida.

Agora, um parecido, com um pequeno detalhe:

Exemplo: Começando com o conjunto $\{3,4,12\}$, é permitido apagar dois números a e b e escrever em seus lugares $0{,}6a-0{,}8b$ e $0{,}8a+0{,}6b$. É possível chegar ao conjunto $\{4,6,12\}$?

A diferença é que agora transformamos um par ordenado em outro:

$$f(a,b)=(0{,}6a-0{,}8b;0{,}8a+0{,}6b)$$

Mas o invariante é parecido com os anteriores... tente descobrir!

Um outro tipo de invariante são restos de divisões!

Exemplo: Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Depois de 2007 segundos, os cangurus podem voltar a ocupar a posição relativa inicial?

Mais um tipo de invariante, que é a variação de uma grandeza em apenas uma direção: apenas crescer ou decrescer!

Exemplo: Há 12 anões morando numa floresta, em casas pintadas de azul ou verde. Em cada mês do ano, um dos anões visita todos os seus amigos (não necessariamente todos os outros 11) e, se vir que mais da metade deles vive em casas de cor diferente da sua, muda a cor da sua casa. É possível que, a partir de algum momento, nenhum anão precise mudar mais a cor de sua casa? Amizades são mútuas (então se A visita B, B visita A) e eternas.

Considere os pares de amigos com cores de casas diferentes (chame esses pares de <u>amizades coloridas</u>). O que acontece com eles conforme o tempo passa? A tendência é que esse número só diminua, pois se um anão vir que mais da metade dos amigos mora em casa de cor diferente, ele muda a cor da sua casa. Assim, se ele tinha mais da metade dos amigos como amizades coloridas, agora elas somem e os amigos que antes tinham a mesma cor da casa (que são menos) se tornam amizades coloridas. Mas não é possível diminuir para sempre porque o número de amizades coloridas não é infinito, então uma hora esse número deve parar de diminuir, e será quando as casas definirem sua cor para toda a eternidade!

Em problemas de tabuleiro, a dica é pintá-lo com algum padrão para descobrir como o número de peças em casas de cada cor se comporta.

Exemplo: Considere um tabuleiro 8x8. Temos uma peça na extremidade superior esquerda do tabuleiro. Com movimentos da peça para casas vizinhas da atual (que tenham uma aresta em comum), devemos percorrer todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e terminar no canto inferior direito. É possível fazer isso?

Pinte o tabuleiro como um tabuleiro de xadrez, com uma casa alternadamente preta e branca. Suponha que a casa inicial seja preta. Se percorrermos todas as 64 casas com a peça, fazemos a seqüência de cores preta, branca, preta, branca... terminando numa casa branca. Mas a casa do canto inferior direito é preta, absurdo. Logo, não é possível percorrer todas as casas exatamente uma vez e terminar no canto oposto.

Exemplo: Temos um tabuleiro infinito, e nele um quadrado $n \times n$ de casas com peças iguais. Vamos jogar um resta-um! Para que valores de *n* o jogo pode ser terminado?

Dica: faça para valores pequenos de *n* e veja o que acontece.

Problemas

1- São escritos numa lousa os números $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{2n+1}$. Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: apagam-se dois números quaisquer *a* e *b* e escreve-se $a+b-2ab$ na lousa. Quais os possíveis números que podem sobrar?

2- São escritos numa lousa os números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: apagam-se dois números quaisquer *a* e *b* e escreve-se $a+b+ab$ na lousa. Quais os possíveis números que podem sobrar?

3- São escritos numa lousa os números $2, 6, 12, \ldots, n(n+1), \ldots, 9900$. Faz-se a seguinte operação até que reste apenas 1 número: apagam-se dois números quaisquer *a* e *b* e escreve-se $\frac{ab}{a+b}$ na lousa. Quais os possíveis números que podem sobrar?

4- Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

5- Vamos construir uma seqüência da seguinte forma: o 1º termo é $a_1 = 1$, e a partir do segundo, o termo a_n é igual ao termo anterior a_{n-1} somado à soma dos seus dígitos. Assim temos $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, $a_6 = 23$ etc. Será que 123456 pode pertencer à seqüência?

6- Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, enquanto todas não estejam em um mesmo quarto, uma pessoa anda para um quarto com um número igual ou maior de pessoas do que o quarto que ocupava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

7- A professora desafia André e Thiago com o seguinte jogo, em que eles jogam alternadamente. Ela escreve no quadro-negro os inteiros de 1 a 50. Uma jogada consiste em escolher dois dos números escritos, apagar esses números, substituindo-os pela soma (Por exemplo, se André escolheu 8 e 23, apagam-se os dois e escreve-se 31). Depois de algum tempo, vai restar no quadro negro um único número. Se esse número é par, o ganhador é André, caso contrário, o ganhador é Thiago. Quem vence o jogo: André ou Thiago?

Referências:

[1] Eureka! 14: o Princípio da Invariância