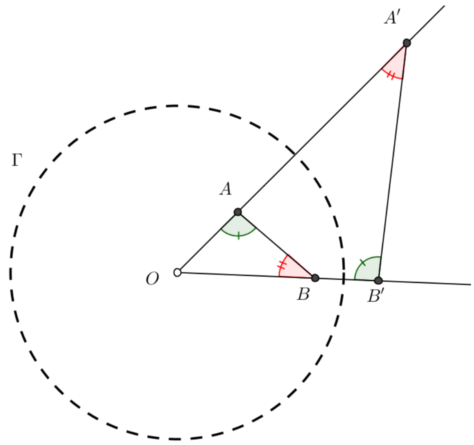
Inversão e os Problemas de Apolônio - Nível 2

Prof. Oertes

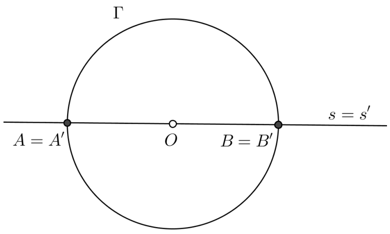
Uma inversão em relação a uma circunferência Γ de centro O e raio r é uma função que associa a cada ponto A (distinto de O), do plano definido por Γ, o ponto A' da semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $OA \cdot OA' = r^2$. Neste caso, dizemos que A e A' são inversos em relação a Γ.

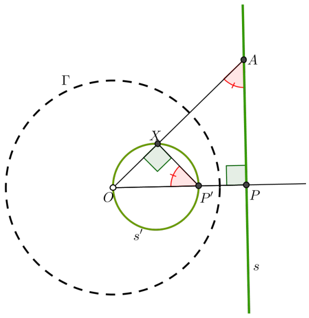
Propriedades da Inversão

- O inverso de um ponto interno a Γ (distinto de O) é externo a Γ e vice-versa.O inverso de um ponto pode ser facilmente obtido com régua e compasso!
- Se $A \in \Gamma$, então $A' = A$ (O inverso de um ponto de Γ é o próprio ponto).
- A inversão inverte a orientação de um ângulo, isto é, dados os pontos A e B, distintos entre si e distintos de O, temos que $O\hat{A}B \cong O\hat{B}'A'$ e .$O\hat{B}A \cong O\hat{A}'B'$.

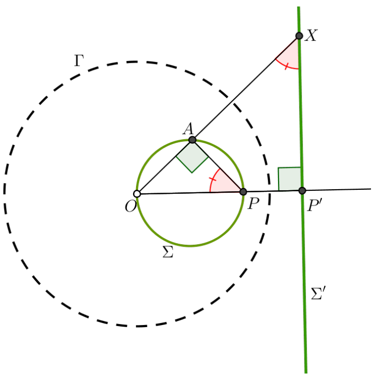


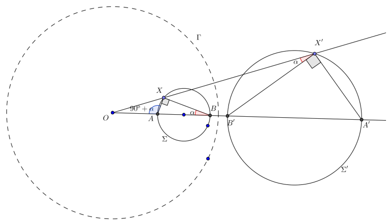
- Decorre diretamente da definição que o inverso do inverso de um ponto é o próprio ponto, isto é, $(A')' = A$. De um modo geral, se Ω é uma reta ou uma circunferência, temos que $(\Omega')' = \Omega$.
- Se A e B são pontos distintos tais que A está entre O e B, isto é, $O-A-B$, então $O-B'-A'$, ou seja, quanto mais próximo um ponto está de O, mais longe estará seu inverso. Generalize esse resultado para infinitos pontos em uma semirreta de origem O!.
- O inverso de uma reta s em relação a Γ é a própria reta s se esta passar por O, ou uma circunferência passando por O, se s não passar por O.





- O inverso de uma circunferência Σ em relação a Γ é uma reta que não passa por O, se $O \in \Sigma$, ou uma circunferência que não passa por O, se $O \notin \Sigma$. É isso mesmo: uma inversão pode transformar uma reta em uma circunferência e vice-versa!.





Após definirmos e entendermos o ângulo entre duas curvas, temos a seguir a propriedade mais importante desta aula:

- **A inversão preserva o ângulo entre duas curvas!**. As curvas às quais nos restringiremos são retas e circunferências. Em particular, se duas retas ou uma reta e uma circunferência ou duas circunferências são ortogonais, então seus inversos também os serão. Além disso, se duas circunferências sâo tangentes (neste caso, o ângulo entre elas é nulo), então seus inversos com relação a uma circunferência cujo centro não passa pelas duas também são duas circunferências tangentes.

Os Problemas de Apolônio

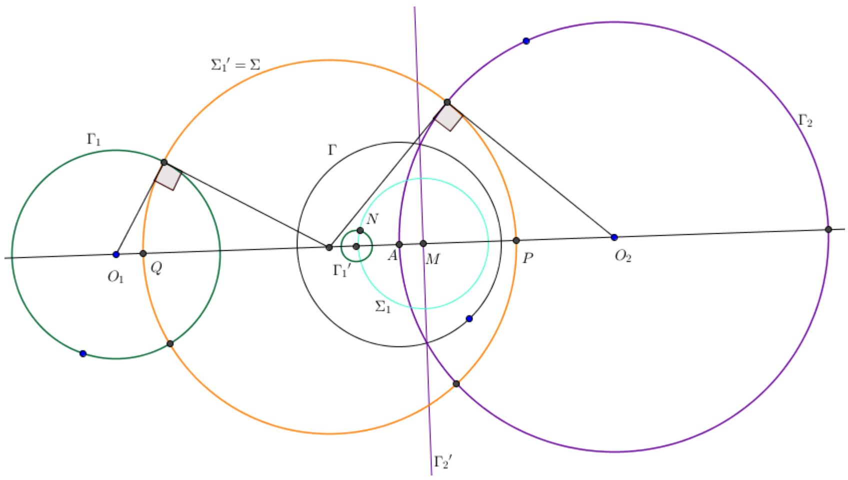
Dados três objetos distintos, que podem ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar, com régua e compasso, uma circunferência tangente a estes três objetos (onde tangência a um ponto significa que a circunferência passa por aquele ponto).

Quanto aos objetos temos 10 situações possiveis (verifique!). Nesta aula, vamos resolver o problema para três circunferências Γ_1, Γ_2 e Γ_3, disjuntas e externas duas a duas.

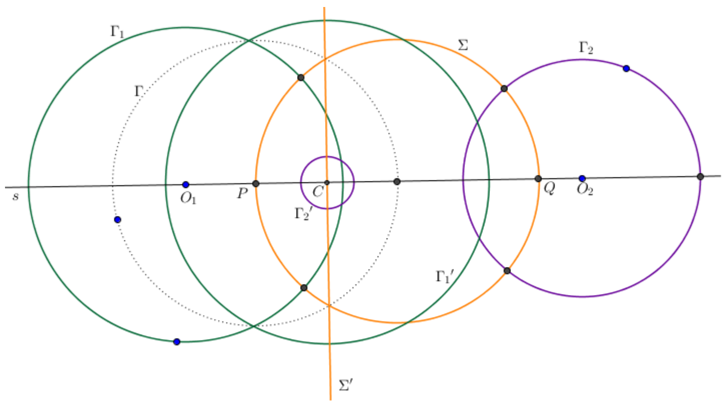
Para resolver o problema, precisamos antes de um importante resultado:

Lema: Existe uma inversão que transforma duas circunferências externas Γ_1 e Γ_2 em duas circunferências concêntricas Γ_1' e Γ_2'.

Para demonstrar este lema, inicialmente mostramos como construir uma circunferência Σ, ortogonal a Γ_1 e a Γ_2 e tal que os centros destas três circunferências estejam alinhados.



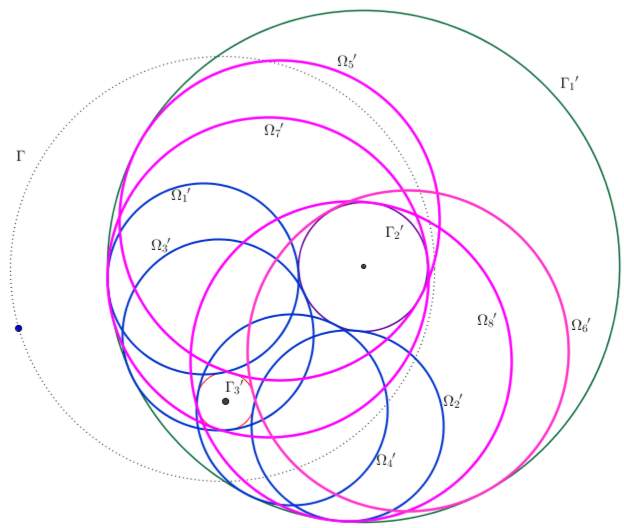
Uma inversão em relação a uma circunferência Γ cujo centro é um dos pontos de intersecção da que reta que une os centros de Γ_1 e Γ_2 com Σ transforma a figura anterior na seguinte:



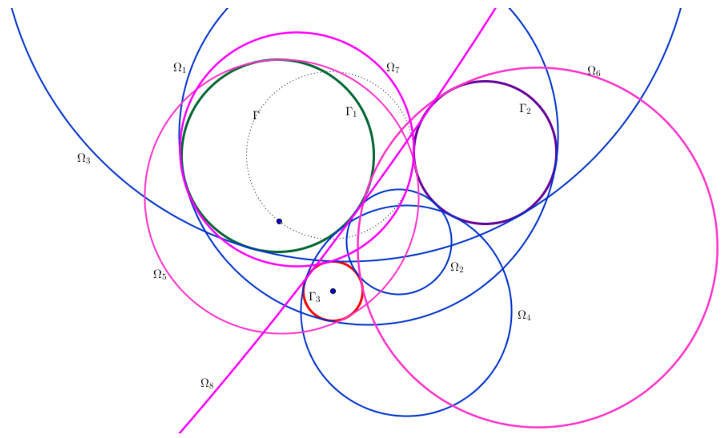
A seguir, podemos mostrar que o inverso de Γ_3 é uma circunferência contida no interior da coroa circular determinada por Γ_1' e Γ_2'.

Esta transformação reduz o problema original a um outro bem mais simples: desenhar as circunferências tangentes simultaneamente a Γ_1', Γ_2' e Γ_3'.

Notemos que para este último problema há **exatamente 8 soluções**, que estão a seguir, designadas por Ω_i', $i = 1, 2, ..., 8$.

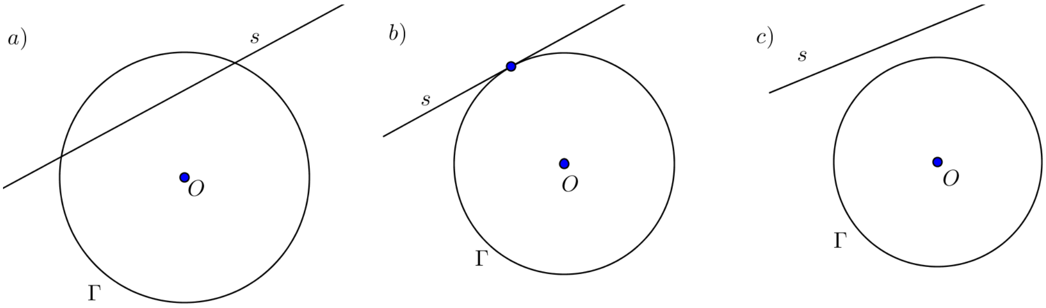


Assim, as soluções do nosso problema original podem ser obtidas "desinvertendo-se"estas 8 circunferências. Estas 8 soluções podem ser vistas na figura a seguir:

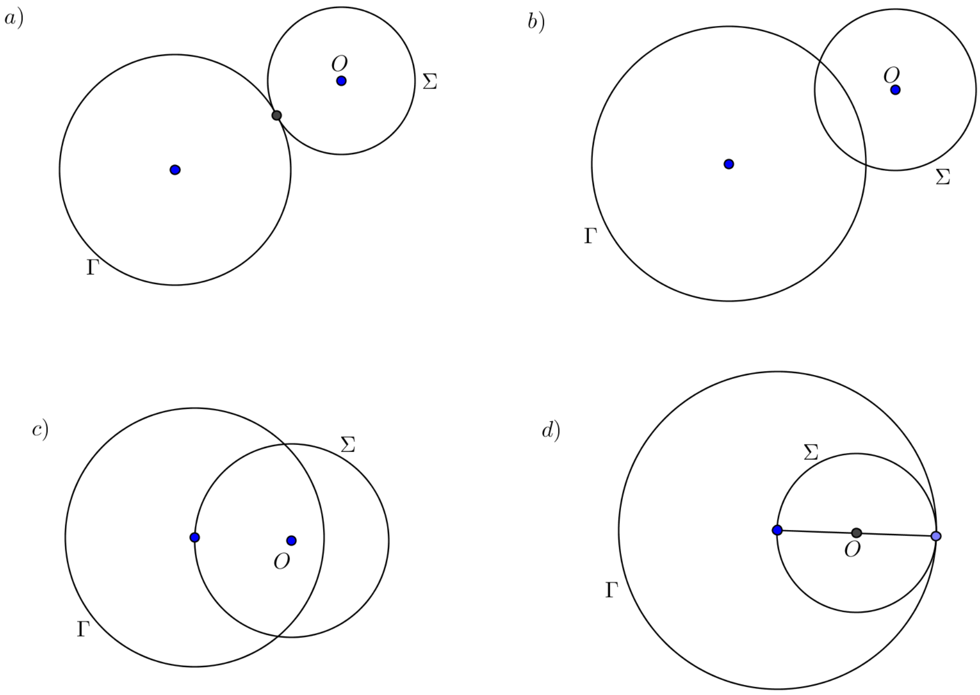


Exercícios

1. Utilizando régua e compasso, desenhe o inverso s' da reta s em relação à circunferência Γ, de centro O, em cada caso a seguir:



2. Em cada caso a seguir, desenhe o inverso Σ' da circunferência Σ em relação à circunferência Γ, de centro O.

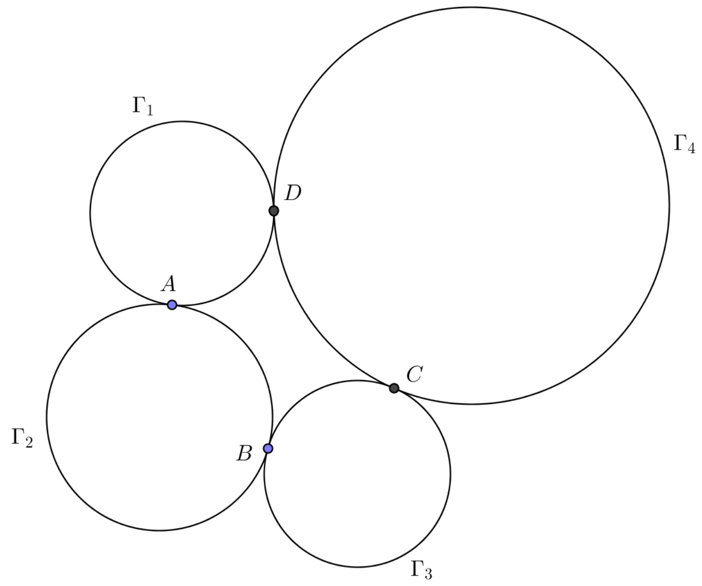


3. Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências tangentes externamente e uma reta s exterior a ambas. Construa uma circunferência tangente a Γ_1, a Γ_2 e a s.

4. Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências tangentes e P um ponto fora delas. Construa uma circunferência que passa por P e é tangente a Γ_1 e Γ_2.

5. Dadas três circunferências Γ_1, Γ_2 e Γ_3, tangentes externamente entre si, duas a duas, construir uma circunferência tangente às três. Quantas soluções tem este problema?

6. A figura a seguir mostra quatro circulos Γ_1, Γ_2, Γ_3 e Γ_4, tais que cada um é tangente externamente a dois de seus vizinhos (por exemplo, os vizinhos de Γ_1 são Γ_2 e Γ_4). Mostre que A, B, C e D (os quatro pontos de tangência) são concíclicos.



7. Sejam A, B, C e D não concíclicos e sem que haja três deles colineares. Mostre que o ângulo entre os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ABD é congruente ao ângulo entre os círculos circunscritos aos triângulos CDA e CDB.