

Marcação de Ângulos

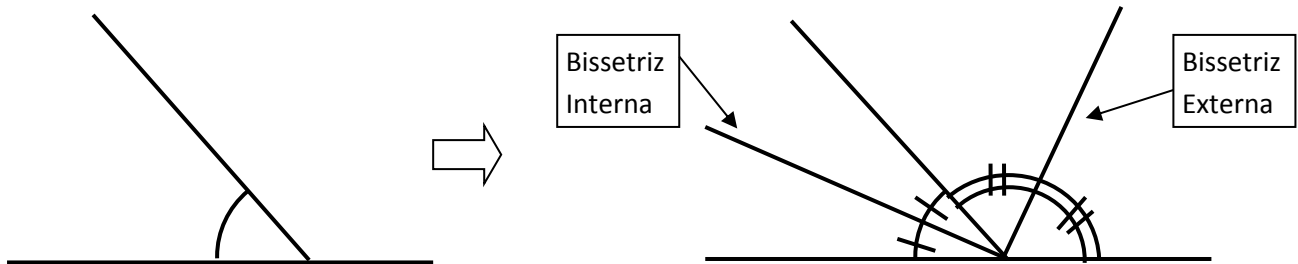
Professor Emiliano Augusto Chagas

Roteiro para problemas em que a figura já é dada:

- Se um ou mais ângulos forem dados, utilize-os para marcar outros ângulos na figura.
- Caso você não tenha nenhum valor numérico de ângulo, chame algum ângulo de x ou θ .
- Se o problema não sair de imediato, procure triângulos isósceles, você pode "arrastar" segmentos e encontrar outros triângulos isósceles.

Bissetriz Interna de um Ângulo: uma semirreta que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.

Bissetriz Externa de um Ângulo: uma semirreta que divide o ângulo suplementar em dois ângulos congruentes.



Para esquentar!

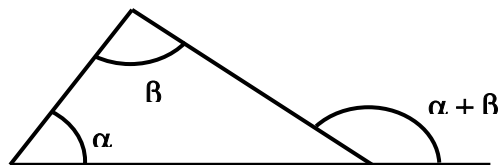
- 01) Prove que as bissetrizes interna e externa de um ângulo são perpendiculares entre si.
- 02) Prove que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

ATENÇÃO! ATENCIÓN! ATENTION! ACHTUNG! Um exemplo numérico não vale para problemas do tipo "prove que" ou "demonstre que".

Agora vamos para problemas que envolvem polígonos. Precisamos de poucos resultados.

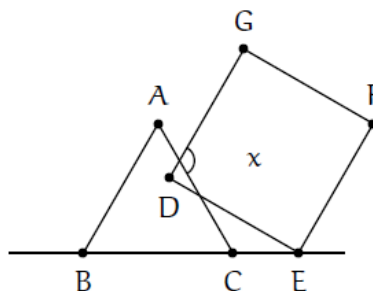
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°
- Um polígono com mais de três lados pode ser particionado em triângulos.
- Um polígono regular possui todos os lados congruentes e também todos os ângulos congruentes entre si.

Teorema do ângulo externo: o ângulo suplementar de um ângulo do triângulo é a soma dos dois outros ângulos desse triângulo. Observe o desenho.

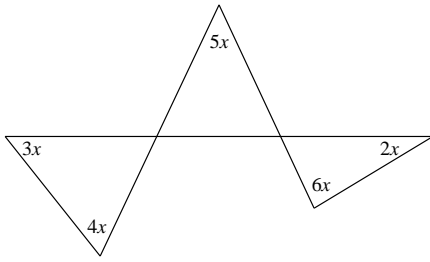


03) Prove o teorema do ângulo externo.

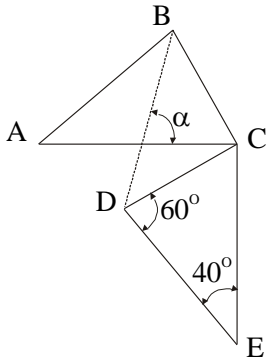
04) Na figura abaixo, o lado AB do triângulo equilátero ABC é paralelo ao lado DG do quadrado DEFG. Qual é o valor do ângulo x ?



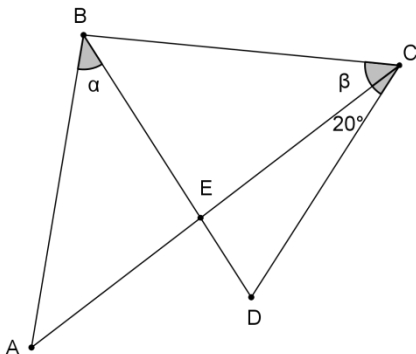
05) Na figura, quanto vale x ?



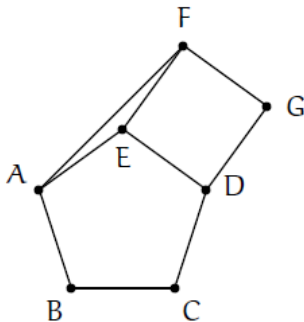
06) O triângulo CDE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90° no sentido anti-horário ao redor de C , conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a quanto?



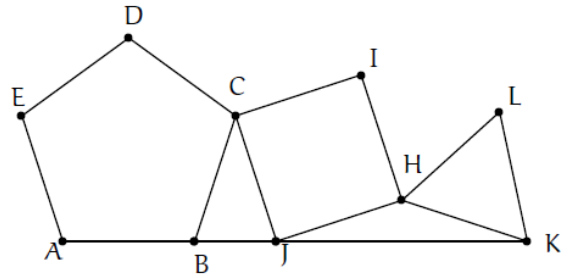
07) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?



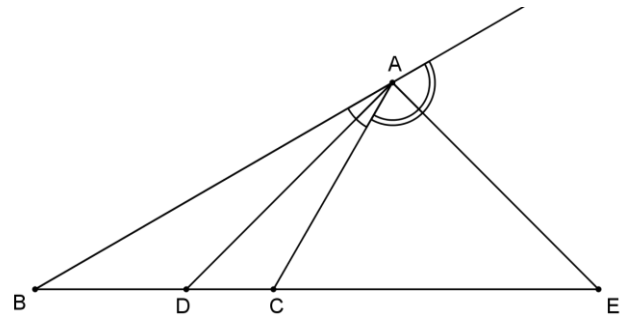
08) $DEFG$ é um quadrado no exterior de um pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo EAF ?



09) Na figura abaixo temos um pentágono regular, um quadrado e um triângulo equilátero, todos com a mesma medida de lado. Determine, em graus, o ângulo DIL .

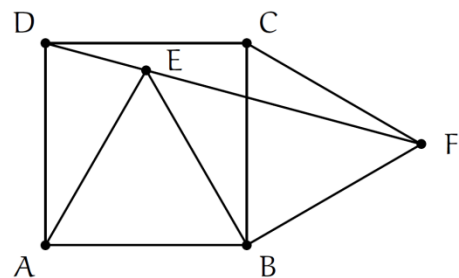


10) No triângulo ABC , as bissetrizes interna e externa do vértice A encontram a reta BC nos pontos D e E , respectivamente, conforme a figura a seguir. Sendo $AD = AE$, determine:

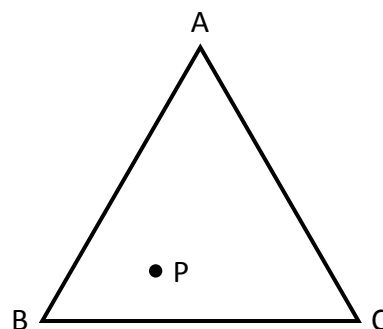


- a medida do ângulo DAE . (não se assuste: apesar de nenhum dado numérico ser apresentado, a resposta é um número!)
- as medidas dos ângulos ADE e AED .
- o valor de $m(\angle BCA) - m(\angle CBA)$.

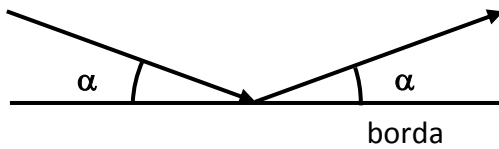
11) Construimos dois triângulos equiláteros ABE interno e BFC externo ao quadrado $ABCD$. Prove que os pontos D , E e F se localizam na mesma reta.



12) Fernando e Paulo construíram uma mesa de bilhar com formato de um triângulo equilátero, como se vê na figura a seguir.



Descobriram que quando a bola bate na borda do tabuleiro com um certo ângulo, ela rebate com o mesmo ângulo.



a) Numa bola situada no ponto P, Paulo deu a primeira tacada, perpendicularmente ao lado AB. Depois de bater pela primeira vez na borda da mesa, a bola passou pelo ponto P. Depois disso, a

bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.

b) Numa bola situada no ponto P, agora Fernando deu a primeira tacada, paralela ao lado AC. A bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.

Roteiro para problemas em que a figura não é dada:

- Faça um esboço do problema, é bem provável que ele não fique bom mas você ganha intuição!
- Depois do esboço faça um desenho maior e mais preciso.
- Não fique triste se o desenho não estiver saindo, vá melhorando ele, e não se esqueça de fazer o desenho grande.

13) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $m(\hat{C}) = 76^\circ$ e $m(\hat{D}) = 128^\circ$. Traçam-se as bissetrizes de \hat{A} e \hat{B} , que se cruzam em P . Calcule $m(\hat{APB})$.

14) Em um triângulo ABC marcamos o ponto D no lado BC , o ponto E no lado AC , traçamos a bissetriz de \hat{CAD} e a bissetriz de \hat{CBE} . Essas duas bissetrizes se intersectam no ponto F . Sabemos que $m(\hat{AFB}) = 84^\circ$. Calcule o valor de $m(\hat{AEB}) + m(\hat{ADB})$.

15) Seja ABC um triângulo obtusângulo com $m(\hat{A}) < m(\hat{C}) < m(\hat{B})$. A bissetriz externa do ângulo \hat{A} intersecta o prolongamento de CB em X e a bissetriz externa do ângulo \hat{B} intersecta o prolongamento de AC em Y . Se $AX = AB = BY$, calcule a medida do ângulo \hat{A} .

16) O triângulo ABC é isósceles, com $AB = BC$ e com $m(\hat{ABC}) = 82^\circ$. Seja M um ponto interior ao triângulo tal que $AM = AB$ e $m(\hat{MAC}) = 11^\circ$. Encontre a medida do ângulo \hat{MCB} .

17) (Triângulo Russo) Seja ABC um triângulo isósceles com $\hat{ABC} = 20^\circ$ e $AB = BC$. Sejam os pontos E no segmento BC e D no segmento AB tais que $\hat{CAE} = 50^\circ$ e $\hat{ACD} = 60^\circ$. Encontre \hat{CDE} . (Dica: Considere um ponto F no segmento AB tal que $\hat{ACF} = 20^\circ$, marque ângulos e procure triângulos isósceles).

Bons estudos !