Matrizes

Professor Matheus Secco

29 de janeiro de 2015

1 Problemas

1. (Colômbia 03) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ singular com entradas reais. Prove que existe uma matriz B quadrada não nula tal quue $AB = 0$ e $BA = 0$.

2. (OBMU 08) Prove que não existe uma matriz 7×7 com entradas positivas cujos autovalores (contados com multiplicidade) são: $6, -5, -5, 1, 1, 1, 1$.

3. (Putnam 91) Sejam A e B matrizes $n \times n$ distintas e com entradas reais. Suponha que $A^3 = B^3$ e $A^2B = B^2A$. É possível que $A^2 + B^2$ seja inversível?

4. (Ibero-u 05) Sejam A, B, C matrizes reais quadradas de ordem n tais que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$. Suponha que C é simétrica. É possível que n seja igual a 2005?

5. (Colômbia 04) Sejam A e B matrizes $n \times n$ com entradas reais tais que para qualquer matriz X com entradas reais, vale que $\det(A + X) = \det(B + X)$. Prove que $A = B$.

6. (Putnam 94) Sejam A e B matrizes 2×2 com entradas inteiras. Suponha que $A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B$ são matrizes inversíveis cujas inversas possuem entradas inteiras. Prove que $A + 5B$ é inversível e que sua inversa possui entradas inteiras.

7. (Colômbia 11) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais de forma que cada uma possui posto $n-1$. Demonstre que se $k < n$, o produto $A_1 A_2 \ldots A_k$ é não nulo.

8. (IMC 09) Sejam A e B matrizes $n \times n$ com entradas complexas tais que

   $$A^2B + BA^2 = 2ABA$$

   Prove que existe um inteiro positivo k tal que $(AB - BA)^k = 0$.

9. (Putnam 69) Sejam A e B matrizes 3×2 e 2×3, respectivamente. Suponha que

   $$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Determine o produto BA.

10. (Putnam 85) Seja G um conjunto finito de matrizes reais $n \times n$ $\{M_i\}$, $1 \le i \le r$, que forma um grupo com respeito à multiplicação de matrizes. Suponha que $\sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(M_i) = 0$. Prove que $\sum_{i=1}^{r} M_i = 0$ é a matriz nula de ordem n.

11. (Putnam 86) Sejam A, B, C, D matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo F tais que AB^t e CD^t são simétricas. Suponha que $AD^t - BC^t = I$. Prove que $A^tD - C^tB = I$.

12. (IMC 07) Seja $n > 1$ um inteiro positivo ímpar e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se} i - j \equiv \pm 2 \pmod{n} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Encontre $\det A$.

13. (IMC 11) Seja n um inteiro positivo fixado. Determine o menor posto possível de uma matriz $n \times n$ que possui zeros na diagonal principal e reais positivos nas outras entradas.

14. (IMC 11) Seja $n \ge 2$ um inteiro. Encontre todos os reais a para os quais existem reais $x_1, \ldots, x_n$ satisfazendo

$$x_1(1 - x_2) = x_2(1 - x_3) = \ldots = x_{n-1}(1 - x_n) = x_n(1 - x_1) = a$$

15. (OBMU 12) Considere todas as matrizes quadradas de ordem $4n$ que têm $4n$ entradas iguais a 1, $4n$ entradas iguais a -1 e as demais entradas iguais a 0. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?

16. (VJ 09) Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas inteiras. Sejam p, q, r inteiros positivos, com r ímpar e $p^2 = q^2 + r^2$. Suponha que $p^2 A^{p^2} = q^2 A^{q^2} + r^2 I_n$. Prove que $|\det A| = 1$.

17. São dados $2n + 1$ reais, $n \ge 1$, com a seguinte propriedade: quando qualquer um destes reais é removido, os $2n$ restantes podem ser divididos em dois conjuntos de n elementos cada que possuem a mesma soma dos elementos. Prove que todos os números são iguais.

18. (VJ 07) Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que

$$A + A^t = I$$

Prove que $\det A > 0$.

19. (Ibero-u 10) Sejam A, B matrizes 2010×2010 com entradas reais tais que $AB = BA$. Suponha que $A^{2010} = B^{2010} = I$. Prove que se $\operatorname{tr}(AB) = 2010$, então $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

20. (Colômbia 02) Seja p_{qn} a probabilidade de que uma matriz $n \times n$ cujas entradas são escolhidas aleatoriamente a partir de um corpo com q elementos seja inversível. Prove que

$$\frac{q-3}{q+1} < p_{qn} < \frac{q}{q+1}$$