Fluxos em Redes

Definição 1 Uma *rede de transporte* é um grafo direcionado finito $D = (V, E)$, contendo vértices s e t, chamados respectivamente **fonte** e **destino**, tais que as arestas que incidem em s são todas de partida e as arestas que incidem em s são todas de chegada. A uma rede de transporte está associada uma função $c : E(D) \to \mathbb{R}_+$ que a cada aresta e de D atribui um valor $c(e) \geq 0$, chamado **capacidade** da aresta e. A função c é chamada função capacidade desta rede de transporte.

Definição 2 Um *fluxo* em uma rede de transporte é uma função $f : E(D) \to \mathbb{R}_+$ que para cada aresta e associa um número real $f(e)$, chamado fluxo da aresta e, tal que:

i) $0 \leq f(e) \leq c(e)$, para todo $e \in E(D)$ (o fluxo é factível);

ii) Para cada vértice $x \neq s, t$, a soma dos fluxos das arestas que partem de x é igual à soma dos fluxos das arestas que chegam a x. (Lei da Conservação)

A soma dos fluxos das arestas que partem da fonte s é o *valor do fluxo* e é denotado por $|f|$.

Exercício 1 Mostre que o valor do fluxo f é também igual à soma dos fluxos das arestas que chegam ao destino t.

Nosso objetivo ao estudarmos fluxos em redes de transportes será descobrirmos um método para construirmos um fluxo máximo, i.e., um fluxo com valor máximo. Inicialmente, podemos encontrar cotas superiores para $|f|$. Sabemos, por exemplo, que $|f| \leq$ soma das capacidades das arestas que partem da fonte s.

Definição 3 Vamos definir um *corte* separando s e t, ou simplesmente um corte, como sendo uma partição (X, Y) dos vértices de D tal que $s \in X$ e $t \in Y$ (lembre que $X \cup Y = V(D)$ e que $X \cap Y = \emptyset$). Definimos ainda a *capacidade* desse corte, denotada por $c(X, Y)$, como a soma das capacidades das arestas direcionadas de X para Y.

Afirmação: $|f| \leq c(X, Y)$, qualquer que seja o corte (X, Y). Mais geralmente, vamos provar que

$$|f| = f(X, Y) - f(Y, X), \tag{1}$$

em que $f(A, B)$ é a soma dos fluxos das arestas direcionadas de A para B. Com isso, provamos imediatamente que $|f| \leq f(X, Y) \leq c(X, Y)$, para qualquer corte (X, Y). Isto nos diz que a capacidade mínima de todos os cortes é uma cota superior para o valor do fluxo.

Prova de (1):

Defina $\phi : V \times E \to \{-1, 0, 1\}$ pondo

$$\phi(x, e) = \begin{cases} 0, \text{se } e \text{ nao incide em } x. \\ 1, \text{se } e \text{ parte de } x. \\ -1, \text{se } e \text{ chega a } x. \end{cases}$$

Observe agora que a Lei da Conservação se escreve como

$$\sum_{e \in E} \phi(x, e) \cdot f(e) = 0, \quad \forall x \in V \backslash \{s, t\}.$$

Dado um corte (X, Y), note ainda que

$$\sum_{x \in X} \phi(x, e) = \begin{cases} 1, \text{se } e \text{ estiver direcionada de } X \text{ para } Y. \\ -1, \text{se } e \text{ estiver direcionada de } Y \text{ para } X. \\ 0, \text{se } e \text{ possui ambas extremidades em } X \text{ ou em } Y. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} |f| = \sum_{e\in E} \phi(s,e) f(e) &= \sum_{x\in X}\sum_{e\in E} \phi(x,e) f(e) \\ &= \sum_{e\in E} f(e) \sum_{x\in X} \phi(x,e) \\ &= f(X,Y) - f(Y,X). \end{aligned}$$

Um caso especial é tomarmos o corte $(V\backslash\{t\},\{t\})$. Neste caso, obtemos $|f| = f(V\backslash\{t\},\{t\})$, que é uma prova do Exercício 1.

Vamos construir Fluxos

A seguir, vamos desenvolver um algoritmo para obtermos fluxos cada vez maiores, a partir de um fluxo qualquer dado.

Dada uma rede de transportes, fixe um fluxo f, possivelmente o fluxo nulo ($f \equiv 0$). Diremos que uma seqüência $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ de vértices distintos é um *caminho especial* de x_0 a x_k se, para cada i, $1 \le i \le k$, ocorrer:

i) $e = (x_{i-1}, x_i)$ é uma aresta com $c(e) - f(e) > 0$, ou

ii) $e = (x_i, x_{i-1})$ é uma aresta com $f(e) > 0$.

Arestas com $f(e) = c(e)$ são ditas *saturadas*.

Suponha que exista um caminho especial de s até t. Defina $\alpha_i = c(e) - f(e)$, no caso (i), e $\alpha_i = f(e)$, no caso (ii). Defina ainda $\alpha = \min \alpha_i$.

Acrescente α ao fluxo de cada aresta do tipo (i) e subtraia α de cada aresta do tipo (ii) ao longo do caminho especial. Dessa forma, as duas condições (factibilidade e conservação) que definem um fluxo continuam sendo satisfeitas e o novo fluxo obtido tem valor $|f| + \alpha$.

Agora, suponha que não exista um caminho especial da fonte s até o destino t em relação a um fluxo f_0. Fixe X_0 como sendo o conjunto dos vértices que podem ser atingidos a partir de s por um caminho especial e Y_0 o conjunto dos vértices restantes. Então (X_0, Y_0) define um corte. Se $x \in X_0, y \in Y_0$ e $e = (x, y)$ é uma aresta, e deve ser saturada, caso contrário poderíamos adjuntar y a um caminho especial partindo de s, contradizendo as escolhas de X_0 e Y_0. Se, por outro lado, $e = (y, x)$ é uma aresta, devemos ter $f(e) = 0$. Logo, por (1), temos:

$$|f_0| = f(X_0, Y_0) - f(Y_0, X_0) = c(X_0, Y_0). \tag{2}$$

Agora, é claro que não só ficamos impossibilitados de aumentar o valor do fluxo f_0 usando este algoritmo, como não existe de fato um fluxo de valor maior, pois $|f| \le c(X_0, Y_0)$, para qualquer fluxo f. Com isso, provamos o seguinte teorema:

Teorema (Ford-Fulkerson, 1956**)** Em uma rede de transportes, o valor máximo de $|f|$ sobre todos os fluxos f é igual ao valor mínimo de $c(X, Y)$ sobre todos os cortes (X, Y).

Corolário Se todas as capacidades em uma rede de transportes são inteiras, então existe um fluxo f de valor máximo para o qual $f(e)$ é inteiro para toda aresta e.

Prova: Exercício.

Definição 4 Considere um conjunto X e uma coleção $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos de X. Vamos chamar uma seqüência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de SRD (Sistema de Representantes Distintos) de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se os x_i's são elementos distintos de X e se $x_i \in A_i$, para todo i.

Teorema (P. Hall) Existe um SRD se, e somente se, a união de quaisquer m conjuntos A_i contém pelo menos m elementos, para $1 \leq m \leq n$.

Este teorema é mais conhecido como o *teorema do casamento*, e pode ser interpretado da seguinte maneira: considere um conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de garotas e um conjunto X de rapazes. Sempre que $x \in A_i$, a garota i topa casar com x, ou seja, A_i é o conjunto dos rapazes com quem a garota i toparia se casar. Um SRD representa um casamento em massa em que toda garota casa com um rapaz que ela gosta.

Problemas

1. Prove o teorema do casamento.

2. O governo de *Terra Brasilis*, muito inteligentemente, construiu as estradas ligando suas n cidades, $n \geq 3$, de modo que, mesmo no caso de um desastre ou calamidade em uma das cidades, digamos a cidade X, haveria um caminho ligando quaisquer duas das outras cidades o qual não passaria por X. Mostre que um viajante em *Terra Brasilis* pode ir de uma cidade a outra qualquer por pelo menos dois caminhos distintos sem cidades em comum, com exceção das cidades de partida e chegada.

Teorema de Baranyai

Def: Dado um n-conjunto A, definimos uma *classe paralela* de k-subconjuntos de A como sendo uma partição de A em n/k subconjuntos de A, cada um contendo k elementos. Nosso objetivo é verificar para que valores de k e n é possível particionar o conjunto de todos os k-subconjuntos de A em classes paralelas de k-subconjuntos[1]

É claro que, para que seja possivel tal partição, k deve dividir n. Neste caso, o número de classes paralelas é igual a $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Teorema (Baranyai, 1973) Se k divide n, o conjunto de todos os $\binom{n}{k}$ k-subconjuntos de um n-conjunto pode ser particionado em classes paralelas disjuntas A_i, $i = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{k-1}$.

Prova: Inicialmente, defina o termo m-partição de um conjunto X para um multiconjunto A de m suncojuntos dois a dois disjuntos de X, alguns dos quais podem ser vazios, cuja união é X.

De modo a obtermos uma prova indutiva, vamos provar algo um pouco mais geral que o teorema original. Sejam n e k dados e assuma que k divide n. Defina $m := n/k$, $M = \binom{n-1}{k-1}$. Afirmamos que para qualquer ℓ, $0 \leq \ell \leq n$, existe um conjunto

$$A_1, A_2, \ldots, A_M$$

de m-partições de $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ com a propriedade que cada subconjunto $S \subseteq \{1, 2, \ldots, \ell\}$ ocorre em exatamente

$$\binom{n-\ell}{k-|S|} \tag{3}$$

[1]Isto não é difícil para $k = 2$. Para $k = 3$ é bem mais difícil, mas foi feito por R. Peltesohn em 1936, e para $k = 4$ por J.-C. Bermond (não publicado). O resultado geral foi provado por Baranyai em 1973. Todas as provas conhecidas usam de certa forma o teorema Maxflow-Mincut.

das m-partições A_i, em que o coeficiente binomial acima é interpretado como sendo igual a zero caso $|S| > k$ e, para $S = \emptyset$, as m-partições contendo $\emptyset$ são contadas com multiplicidade igual ao número de vezes que o conjunto vazio aparece.

Nossa afirmação será provada por indução sobre ℓ. Observe que o caso $\ell = 0$ é trivial e neste caso cada A_i consitirá de m cópias do conjunto vazio. Também observe que no caso $\ell = n$ estaremos provando o teorema de Baranyai, já que o coeficiente (3) é, para $\ell = n$,

$$\binom{0}{k-|S|} = \begin{cases} 1, & \text{se} |S| = k, \\ 0, & \text{c/c.} \end{cases}$$

Assuma para algum $\ell < n$ que existem m-partições $A_1, A_2, \ldots, A_M$ com a propriedade desejada. Nós vamos construir uma rede de transporte como segue: Existirá um vértice fonte s, um vértice A_i, para $i = 1, 2, \ldots, M$, um vértice S para cada subconjunto $S \subseteq \{1, 2, \ldots, \ell\}$, e um vértice destino t. As arestas são direcionadas de s para cada A_i, com capacidade 1. Existem arestas direcionadas de A_i para os vértices S correspondentes a seus elementos (use j arestas para o conjunto $\emptyset$ caso $\emptyset$ ocorra j vezes em A_i); estas arestas devem ter capacidades inteiras ≥ 1. Existem ainda arestas direcionadas de cada vértice S para o destino t,com capacidade $\binom{n-\ell-1}{k-|S|-1}$.

Nós exibiremos um fluxo nesta rede de transporte: associe um valor de fluxo 1 para as arestas deixando s, um valor de fluxo $\dfrac{k-|S|}{n-\ell}$ às arestas de A_i para S, e um valor de fluxo $\binom{n-\ell-1}{k-|S|-1}$ para as arestas de S até t. É fácil ver que isto define um fluxo na rede: a soma dos fluxos das arestas que partem de A_i é

$$\sum_{S \in A_i} \frac{k-|S|}{n-\ell} = \frac{1}{n-\ell}\left(mk - \sum_{S \in A_i} |S|\right) = \frac{1}{n-\ell}(mk - \ell) = 1.$$

A soma dos valores dos fluxos das arestas que chegam em um vértice S é:

$$\sum_{i : S \in A_i} \frac{k-|S|}{n-\ell} = \frac{k-|S|}{n-\ell}\binom{n-\ell}{k-|S|} = \binom{n-\ell-1}{k-|S|-1}.$$

Desde que todas as arestas deixando s são saturadas, este é um fluxo m máximo de potência M. As arestas que chegam a t são também saturadas neste fluxo, e assim em qualquer fluxo máximo. Pelo teorema do Corte-Máximo-Corte Mínimo, para capacidades inteiras, esta rede admite um fluxo máximo f em que cada aresta tem fluxo inteiro. Todas as arestas deixando s serão saturadas, de modo que para cada i, f associa 1 a uma das arestas que parte de A_i e 0 a todas as outras. Digamos que f associa 1 à aresta ligando A_i a seu membro S_i. Para cada subconjunto S, o número de valores i tais que $S_i = S$ é $\binom{n-\ell-1}{k-|S|-1}$.

Finalmente, nós obtemos um conjunto de m-partições $A'_1, A'_2, \ldots, A'_M$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, \ell+1\}$, em que A'_i é obtido de A_i substituindo seu membro S_i por $S_i \cup \{\ell+1\}$, $i = 1, \ldots, M$. Agora, basta checarmos que cada subconjunto T de $\{1, 2, \ldots, \ell+1\}$ ocorre exatamente

$$\binom{n-(\ell+1)}{k-|T|}$$

vezes entre $A'_1, \ldots, A'_M$. Isto completa o passo indutivo.

Exercício: Sejam u e v inteiros com $v \geq 2u$ e v par, e considere o grafo completo K_u como um subgrafo de K_v. Suponha que as arestas de K_u são coloridas com $v-1$ cores, tal que arestas distintas da mesma cor são disjuntas. Mostre que esta coloração pode ser extendida a uma coloração de $E(K_v)$ com $v-1$ cores tal que arestas da mesma cor sejam disjuntas.