Teoremas de Menelaus e Ceva
Nível II

Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Semana Olímpica – Janeiro/2001 - Salvador

Introdução

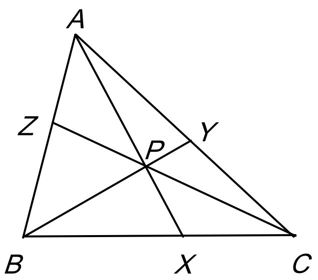
Provas de teoremas envolvendo colinearidade e concorrência normalmente são "pesadas", longas e, consequentemente, impopulares. Com a ajuda de dois famosos teoremas, elas podem ser simplificadas.

O primeiro foi descoberto por Menelaus de Alexandria (aproximadamente 100 A.C.). Em 1678, Geovanni Ceva, um matemático italiano, publicou o Teorema de Menelaus e um segundo teorema de sua própria autoria, relacionado com o primeiro. Os problemas nesta lista envolverão o Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva ou ambos. Dentre essas aplicações clássicas estão os teoremas de Gerard Desargues, Blaise Pascal e Pappus de Alexandria. A dica será: tentar usar Teorema de Menelaus para problemas de colinearidade e Teorema de Ceva para concorrência.

Teorema de Ceva

$$\frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{BZ \cdot CX \cdot AY} = 1 \Leftrightarrow$$

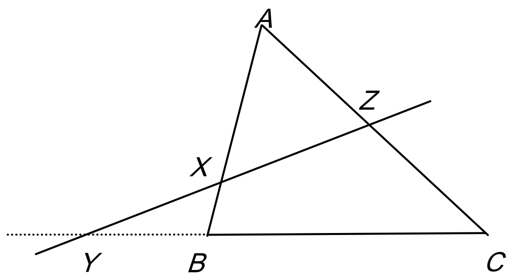
***AX, BY, CZ* são concorrentes.**



Teorema de Menelaus

$$\frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AX}{BX} = 1 \Leftrightarrow$$

***X, Y, Z* estão alinhados.**



Problemas

(01) Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

(02) Prove que as bissetrizes externas de um triângulo não isósceles cortam os lados opostos em três pontos colineares.

(03) No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP=CQ=2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB=10$ e $AC=8$, encontre TS.

(04) Um círculo passando pelos vértices B e C de um ΔABC corta AB em P e AC, em R. Se PR corta BC em Q, prove que $\dfrac{QC}{QB} = \dfrac{RC \times AC}{PB \times AB}$.

(05) No quadrilátero $ABCD$, as retas AB e CD se cortam em P, enquanto as retas AD e BC se cortam em Q. As diagonais AC e BD cortam PQ em X e Y. Prove que $\dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YQ}$.

(06) Prove que uma reta desenhada passando pelo baricentro G de um ΔABC corta os lados AB e AC nos pontos M e N, respectivamente, de tal forma que $AM \times NC + AN \times MB = AM \times NA$.

(07) No triângulo ABC, os pontos L, M, N estão sobre BC, AC, AB, respectivamente, e AL, BM, CN são concorrentes.

a) Encontre o valor numérico de

$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}.$$

b) Encontre o valor numérico de

$$\frac{AP}{AL}+\frac{BP}{BM}+\frac{CP}{CN}.$$

(08) Os segmentos congruentes AE e AF são tomados sobre os lados AB e AC, respectivamente, do ΔABC. A mediana AM intersecta EF em Q. Prove que $\dfrac{QE}{QF}=\dfrac{AC}{AB}$.

(09) No ΔABC, AL, BM, CN são concorrentes em P. Expresse a razão AP/PL em termos dos segmentos gerados pelas retas concorrentes sobre os lados de ABC.

(10) O lado AB de um quadrado é prolongado até P tal que $BP=2AB$. Com M, ponto médio de DC, BM é desenhado cortando AC em Q. PQ corta BC em R. Usando o Teorema de Menelaus, encontre a razão CR/RB.

(11) Os lados AB, BC, CD e DA de um quadrilátero são cortados por uma reta nos pontos K, L, M e N, respectivamente. Prove que $\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{DN}{NA}\cdot\dfrac{CM}{MD}=1$.

(12) Tangentes ao circuncírculo do ΔABC nos pontos A, B e C corta os lados BC, AC e AB nos pontos P, Q e R, respectivamente. Prove que os pontos P, Q e R são colineares.

(13) Um círculo é tangente ao lado BC do ΔABC em M, seu ponto médio, e corta AB e AC nos pontos R, R' e S, S', respectivamente. Se RS e $R'S'$ são prolongados até cortar BC nos pontos P e P' respectivamente, prove que $BP\times BP' = CP\times CP'$.

(14) No ΔABC, P, Q, R são os pontos médios dos lados AB, BC, CA. As retas AN, BL e CM são concorrentes cortando os lados em N, L e M, respectivamente. Se PL corta BC em J, MQ corta AC em I, e RN corta AB em H, prove que H, I e J são colineares.

(15) AB corta um círculo nos pontos E, E', D, D', F, F'. Prove que se AD, BF e CE são concorrentes, então AD', BF' e CE' também são concorrentes.

(16) Prove que os três pares de tangentes externas comuns a três círculos, tomadas duas a duas, cortam-se em três pontos colineares.