Semana Olímpica 2010 - Nível 3

Samuel Feitosa

1 Aproximações Diofantinas

Problema 1. *(TT 1983) Considere um n-ágono regular com k de seus vértices pintados. Uma coloração é chamada de quase uniforme se, para todo inteiro positivo m, a seguinte condição é satisfeita:*

Se M_1 é um conjunto de m vértices consecutivos de P e M_2 é outro tal conjunto, então o número de vértices coloridos em M_1 difere do número de vértices coloridos em M_2 por no máximo uma unidade.

Prove que para todos inteiros positivos k e n com $(k \leq n)$ uma coloração quase uniforme existe e é única a menos de rotações.

Problema 2. *(Rússia) Prove que para qualquer natural $a > 1$ com $mdc(a, 10) = 1$ e qualquer sequência de dígitos $M = (a_1a_2 \ldots a_k)$, existe um inteiro n tal que os primeiros dígitos à esquerda do número a^n são $(a_1a_2 \ldots a_k)$.*

Problema 3. *Se ξ é um número irracional, então existem infinitos números racionais $\frac{x}{y}$, com $mdc(x, y) = 1$ tais que*

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$$

Teorema 4. *(Hurwitz, Borel)*

1. *Para qualquer ξ, existe infinitas frações $\frac{p}{q}$ tais que*

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

2. *Existe um irracional ξ tal que para qualquer $\lambda > \sqrt{5}$, existe somente um número finito de frações $\frac{p}{q}$ tais que*

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{\lambda q^2}$$

Teorema 5. *(Kronecker) Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então*

$$X = \{m + n\alpha \ |m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é denso em $\mathbb{R}$.

Problema 6. *(Problema do Bruno) Sobre cada ponto de coordenadas inteiras do plano existe um disco de raio ϵ. Mostre que existe um triângulo equilátero cujos vértices estão contidos em três discos distintos.*

Problema 7. *(TST - Romênia - 2003) Considere a sequência definida por $a_n = \lfloor n\sqrt{2003}\rfloor$ para $n \geq 1$. Prove que, para quaisquer inteiros positivos m e p, a sequência contém m elementos em uma progressão geométrica de razão maior que p.*

Problema 8. *(OBM - 1992) Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.*

Problema 9. *(OBM - 2001)Seja ϵ um número real positivo arbitrário. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça-se um círculo de raio ϵ. Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.*

Teorema 10. *(Versão Geral do Teorema de Kronecker) Seja $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então o conjunto*

$$X = \{k\alpha + m_1e_1 + \ldots m_ne_n \ |k, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}$$

é denso em $\mathbb{R}^n$. Onde os e_i formam a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Problema 11. *Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n e 3^n começam com a mesma sequência $M = (a_1a_2 \ldots a_k)$ de dígitos.*

Problema 12. *(Roth) Se α é uma raiz do polinômio*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros, então para todo $\epsilon > 0$, existe somente um número finito de frações $\frac{p}{q}$ tais que

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Problema 13. *Prove que existe uma quantidade não enumerável de reais α com a seguinte propriedade: se $\lambda > 3$, então existe somente um número finito de frações $\frac{p}{q}$ tais que*

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Problema 14. *(Iran 2004) Para todo número real x, definamos $f(x) = \min(\{x\}, \{1 - x\})$, onde $\{x\}$ denota a parte fracionária de x. Prove que para todo irracional α e todo real positivo ϵ, existe um inteiro positivo n tal que $f(n^2\alpha) < \epsilon$.*

2 Pontos de Coordenadas Inteiras

Teorema 15. *(Pick) Seja P um polígono simples*[1] *cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras. Suponha que existam q pontos de coordenadas inteiras no interior de P e p pontos de coordenadas inteiras em seu bordo. Então a área de P é igual à:*

$$q + \frac{p}{2} - 1.$$

Problema 16. *(TST - Romênia 1998) Os vértices de um pentágono convexo não degenerado são pontos de coordenadas inteiras. Prove que a área do pentágono é pelo menos $\frac{5}{2}$.*

Problema 17. *(Putnam 1981) Suponha que cada um dos vértices de um triângulo $\triangle ABC$ é um ponto de coordenadas inteiras e que existe exatamente um ponto P de coordenadas inteiras no interior do triângulo. A reta AP encontra BC em E. Determine o maior valor possível da razão $\frac{|AP|}{|PE|}$.*

Problema 18. *(São Petesburgo 1998) Todos os vértices de um $2n$-ágono convexo são pontos de coordenadas inteiras. Prove que a sua área não é menor que $\frac{n^3}{100}$.*

Problema 19. *(Olimpíada Iraniana 1999) Suponha que $n(r)$ denota o número de pontos com coordenadas inteiras sobre uma circunferência de raio $r > 1$. Prove que*

$$n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

Problema 20. *(Rússia 2000) Seja $ABCDE$ um pentágono convexo sobre o plano coordenado. Cada um de seus vértice é um ponto de coordenadas inteiras. As cinco diagonais de $ABCDE$ formam um pentágono convexo $A_1B_1C_1D_1E_1$ no interior de $ABCDE$. Prove que este pentágono menor contém um ponto de coordenadas inteiras sobre o seu bordo ou sobre o seu interior.*

Problema 21. *(TST China - 2003) Encontre todos os inteiros positivos n satisfazendo a seguinte propriedade: existe um polígono convexo de n lados cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras e os comprimentos de todos os lados são inteiros ímpares e distintos.*

Problema 22. *(Romênia 1996) Sejam n e r inteiros positivos e A um conjunto de pontos de coordenadas inteiras no plano tal que, qualquer disco aberto de raio r contém um ponto de A. Mostre que para qualquer coloração dos pontos de A usando n cores, existem quatro pontos da mesma cor que são vértices de um retângulo.*

Problema 23. *(Austrian-Polish 1999) Considere o seguinte jogo solitário. Sobre o plano, um conjunto finito de pontos de coordenadas inteiras e segmentos é chamdado de uma posição neste jogo se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) As extremidades de cada segmento são pontos de coordenadas inteiras.

ii) Cada segmento selecionado é paralelo a um eixo coordenado ou à reta $y = x$ ou à reta $y = -x$.

iii) Cada segmento selecionado possui exatamente 5 pontos de coordenadas inteiras e todos eles estão selecionados.

iv) Quaisquer dois segmentos selecionados têm no máximo um ponto em comum.

Um movimento do jogo consiste em selecionar um novo ponto de coordenada inteira e um novo segmento de modo que o novo conjunto de pontos e segmentos selecionados seja uma posição. É verdade que existe uma posição inicial tal que o jogo admite infinitos movimentos?

Problema 24. *(São Petesburgo 1990)*

a) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras. Se $ABCD$ não é um trapézio, mostre que

$$|AC \cdot AD - BC \cdot BD| \geq 1$$

b) Os vértices de um quadrilátero são pontos de coordenadas inteiras. Sabendo que $\angle A = \angle C$ e $\angle B \neq \angle D$. Prove que

$$|AB \cdot BC - CD \cdot DA| \geq 1.$$

[1] formado por uma linha poligonal simples

Referências

[1] D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg, Mathematical Circles, AMS (1996).

[2] C. Augusto, S. Feitosa, B. Holanda e Y. Lima, Treinamento Cone Sul 2007, Fortaleza, Realce (2007).

[3] P. J. Taylor, Tournament of the Towns 1980 to 1984, Australian Mathematical Trust (1993)

[4] D. Fomin e A. Kirichenko, Leningrad Mahtematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press (1994).

[5] Tabachnikov, S., Kvant selecta: Algebra and analysis, I AMS (1999).

[6] www.mathlinks.ro