XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO

OBSERVAÇÃO:
Os enunciados dos problemas 3 e 5 continham alguns erros[1]. Publicamos aqui as versões corrigidas. Pedimos desculpas a todos pelos inconvenientes causados.

PROBLEMA 1:
Seja $y = P(x)$ um polinômio de grau 4. Mostre que se existe uma reta (em $\mathbb{R}^2$) que corta o gráfico de P em 4 pontos então existe uma reta que corta o gráfico em 4 pontos igualmente espaçados.

PROBLEMA 2:
$A = (a_{ij})$ uma matriz real simétrica $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Prove que $0 < \det A \le 1$.

PROBLEMA 3:
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ conjuntos com $|A_i| \ge \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \le \frac{n}{4}$ para todo *i*, *j* com $i \ne j$. Prove que $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| \ge \frac{k}{k+1} \cdot n.$

PROBLEMA 4:
Determine todas as soluções reais da equação

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}.$$

PROBLEMA 5:
Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $\ln_0(x) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $\ln_k(x) > 0$, definimos $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$, onde ln é o logaritmo natural.
Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n) \ge 1$, e a_n como $\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(n) = n \cdot \ln(n) \cdot \ln\ln(n) \cdot \ldots \cdot \ln_{k(n)}(n).$

Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.

PROBLEMA 6:
Considere duas elipses no plano $\mathbb{R}^2$ que se intersectam em 4 pontos. Nestes 4 pontos trace as retas tangentes às duas elipses, obtendo assim 8 retas.
Prove que existe uma elipse (ou circunferência) tangente a estas 8 retas.

[1] **A seguir publicamos os enunciados como sairam na prova.**

PROBLEMA 3:

Sejam $A_1, A_2, ..., A_k \subset \{1,2,...,n\}$ conjuntos com $|A_i| \geq \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \leq \frac{n}{4}$ para todo i, j com $i \neq j$. Prove que $\boxed{\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \geq \frac{k}{k+1} \cdot n.}$ aqui está o erro.

PROBLEMA 5:

Dado $x \in$ R, definimos $\ln_0(x) = x$ e, para cada $k \in$ N, se $\ln_k(x) > 0$, definimos $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$, onde ln é o logaritmo natural.

Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n) \geq 1$, e a_n como $\boxed{\prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(x) = x \cdot \ln(x) \cdot \ln\ln(x) \cdot ... \cdot \ln_{k(n)}(x).}$ aqui está o erro.

Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.