IV Semana Olímpica – Nível 2 – Combinatória

Prof. Paulo José – paulo@mail.org

■ **Problema 1**
Patrícia desenhou em uma folha de papel vários pontos ao redor de uma circunferência. Em seguida traçou alguns segmentos com extremidades nestes pontos. Ao final, observou que em sua figura partiam pelo menos três segmentos de cada ponto e que não existiam triângulos nem quadriláteros com vértices nos pontos desenhados.
Determine o menor número possível de pontos desenhados por Patrícia e uma possível representação dos segmentos traçados.

■ **Problema 2**
O prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

(i) cada linha passe exatamente por três paradas;

(ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;

(iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

■ **Problema 3**
Considere um conjunto de $2n$ pontos no plano, $n > 1$, não havendo três deles colineares. Prove que:

(a) é possível dispor n^2 segmentos ligando pares desses pontos, sem que seja formado um triângulo com vértices em três dos pontos dados.

(b) se dispusermos ao menos $n^2 + 1$ segmentos ligando pares desses pontos, então ao menos um triângulo com vértices em três dos pontos dados terá sido formado.

■ **Problema 4**

(a) Cada uma das arestas de um grafo completo com 6 vértices é colorida com verde ou amarelo. Prove que existem três vértices que determinam um triângulo com todas as arestas da mesma cor.

(b) Cada uma das arestas de um grafo completo com 17 vértices é colorida com verde, azul ou amarelo. Prove que existem três vértices que determinam um triângulo com todas as arestas da mesma cor.

■ **Problema 5**
Se os pontos do plano são coloridos com três cores, mostre que sempre existem dois pontos da mesma cor que distam 1 unidade.

■ **Problema 6**
Em *Terra Brasilis* existem n casas onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Existem estradas de mão única de tal modo que:

- cada estrada liga duas casas;
- em cada casa começa exatamente uma estrada;
- em cada casa termina exatamente uma estrada.

Todos os dias, a partir do dia 1, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de Terra Brasilis diz que, quando todos os duendes regressarem à posição original, o mundo acabará.

(a) Demonstre que o mundo acabará.

(b) Se $n = 98$, demonstre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não acabe antes de $300\,000$ anos.