Polinômios e algumas ideias algébricas
Semana Olímpica 2015
Prof. Cícero Thiago

1. (Bulgária) Determine o número de raízes reais da equação
$$x^{1994} - x^2 + 1 = 0.$$

2. Os números reais $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ satisfazem as seguintes condições
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
e
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$
Prove que existem i e j tais que $x_i x_j \leq -\frac{1}{n}$.

3. Ache todos os pares de inteiros $a,\ b$ tais que a $a + b$ é uma raiz da equação $x^2 + ax + b = 0$.

4. Seja P um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Seja x um real que cumpre as seguintes condições:
i. $P(x) = 0$
ii. $P(\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil) = 2P(1) + P(0) + 1$.
Prove que x é irracional.

5. (Romênia TST/1999) Sejam a e n números inteiros, p um número primo tal que $p > |a| + 1$. Prove que o polinômio $f(x) = x^n + ax + p$ não pode ser representado como um produto de polinômios com coeficientes inteiros.

6. Seja $f \in \mathbb{R}[X]$ um polinômio de grau n com coeficiente líder igual a 1, e sejam $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ números inteiros. Prove que existe $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ tal que
$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

7. Sejam a, b e c lados, com medidas inteiras, de um triângulo.
Prove que se a equação
$$x^2 + (a+1)x + b - c = 0$$
possui raízes inteiras, então o triângulo é isósceles.

8. Seja $f(x)$ um polinômio de grau n, $n > 1$, com coeficientes inteiros e n raízes reais, nem todas iguais, no intervalo $(0, 1)$. Prove que se a é o coeficiente líder de $f(x)$, então
$$|a| \geq 2^n + 1.$$

9. Em um triângulo ABC, sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que $(AFE) = (BFD) = (CDE)$. Mostre que
$$\frac{(DEF)}{(ABC)} \geq \frac{1}{4}.$$

10. Seja P um ponto no interior de um triângulo acutângulo ABC e sejam D, E e F os pontos de interseção das retas AP, BP e CP com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Determine P de maneira que a área do triângulo DEF seja máxima.

11. Sejam $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ números reais não - negativos, com $n > 1$, e um número real $a > 0$ tal $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Determine o maior valor possível para a soma
$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

12. Prove que se a, b e c são números inteiros e as somas $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ e $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}$ são também inteiros, então temos $|a| = |b| = |c|$.

13. O elemento da i - ésima linha e j - ésima coluna de uma matriz $n \times n$ é igual a $a_i + b_j$, onde $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ são números reais distintos. Os produtos dos números em cada linha são iguais. Prove que os produtos dos números em cada coluna também são iguais.