O Princípio da Casa dos Pombos

Semana Olímpica 2007
Samuel Feitosa
samuelbf85@gmail.com

$\boxed{\text{Se } nk+1 \text{ pombos irão ser colocados em } n \text{ casas então uma casa terá pelo menos } k+1 \text{ pombos.}}$

Problema 1. *(Torneio das Cidades 1984) É dado um decágono regular com todas as suas diagonais traçadas. Em cada vértice e em cada ponto onde as diagonais se intersectam (considerando apenas pontos de interseção interiores) é colocado o número "* $+1$*". Podemos em qualquer momento mudar os sinais de todos os números escritos em uma diagonal ou em um lado. É possível após um certo número de tais operações termos trocado todos os sinais para* -1*"?*

Problema 2. *(O problema clássico)*

1. *Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *existirão dois inteiros a e b tais que um dividirá o outro.*
2. *Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *exitirá um par de inteiros primos entre si.*

Problema 3. *Mostre que se escolhermos mais que* $2n$ *inteiros do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ *existirão dois inteiros a e b tais que um dos números* $ab+1$ *ou* $4ab+1$ *é um quadrado perfeito.*

Problema 4. *Mostre que em qualquer grupo de* 5 *pessoas existem duas com o mesmo número de amigos no grupo.*

Problema 5. *Dados 8 números naturais distintos, nenhum deles maior que 15, mostre que pelo menos três pares deles têm a mesma diferença positiva.*

Problema 6. *Alguns times de futebol participam de um torneio em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Mostre que em qualquer momento durante o torneio sempre existem dois times que jogarma, até aquele momento, o mesmo número de vezes.*

Problema 7. *Dez estudantes resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um estudante. Existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente um problema, existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente dois problemas, existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente três problemas. Prove que existe pelo menos um estudante que resolveu pelo menos 5 problemas.*

Problema 8. *Prove que um triângulo equilátero não pode ser coberto completamente por dois triângulos equiláteros menores.*

Problema 9. *Prove que existem duas potências de 2 que diferem por um múltiplo de 2006.*

Problema 10. *Prove que entre quaisquer 52 inteiros, podemos encontrar dois cuja diferença de seus quadrados é múltipla de 100.*

Problema 11. *Prove que existe uma potência de 3 cujos três ultimos dígitos de sua representação decimal são 001.*

Problema 12. *Prove que em qualquer grupo de 6 pessoas , existem três pessoas que se conhecem ou três que se desconhecem mutuamente.*

Problema 13. *Prove que podemos escolher um subconjunto de um conjunto de 10 inteiros cuja soma de seus elementos é múltipla de 10.*

Problema 14. *(Leningrado) Dados* 70 *números naturais não excedendo* 200*, prove que existem dois deles cuja diferença é igual a* $4, 5$ *ou* 9*.*

Problema 15. *Prove que entre quaisquer* 2^{n+1} *números naturais existem* 2^n *números cuja soma é divisível por* 2^n*.*

Problema 16. *Seja* $\{a_1, a_2, \ldots, a_{1995}\}$ *uma permutação qualquer de* $\{1, 2, \ldots, 1995\}$*. Mostre que o máximo de*

$$\{a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, 1995a_{1995}\}$$

tem que ser maior ou igual a $(998)^2$*.*

Problema 17. *Em um parlamento de Rolanda existem 65 deputados. Eles formam comitês de modo que:*

a) Nenhum deputado está em todos os comitês

b) Cada dois deputados estão juntos em exatamente 1 comitê

Demonstre que existe um deputado que integra pelo menos 9 comitês.

Problema 18. *Dado um conjunto de pessoas, formam-se comitês compostos de* r *pessoas cada e de modo que dados quaisquer* $r+1$ *comitês, existe pelo menos uma pessoa que está em todos esses comitês. Mostre que existem uma pessoa que está em todos os comitês.*

Problema 19. *(Bielorússia) Os alunos da* OBM *aprendem* n *matérias na semana olímpica. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:*

a) Se $n = 8$ *existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.*

b) Se $n = 7$*, não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.*