Problemas de Cálculo

Carlos Shine

1 Integrais, integrais, integrais

"Mas para quê? Vai dar na mesma..."

e^x, festa das funções

1.1 O truque de Feynman para integrais definidas

Usaremos o seguinte fato, que generaliza o segundo teorema fundamental do Cálculo:

Teorema 1. *Seja $f(t,x)$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$ é contínua em t e x em alguma região do plano que inclui $a(t) \le x \le b(t)$ e $t_0 \le t \le t_1$, em que $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas com derivadas contínuas em $[t_0, t_1]$. Então, para $t_0 \le t \le t_1$,*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\,dx\right) = f(t,b(t)) \cdot b'(t) - f(t,a(t)) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,dx.$$

Uma versão mais simples desse teorema é quando a e b são constantes, que nos diz que podemos "trocar" a ordem da derivada: **sendo a e b reais**,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(t,x)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,dx.$$

Exemplo 1. Calcule

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}\,dx.$$

Solução. Considerando que a derivada de a^y em relação a y é $a^y \ln a$, parece interessante generalizar a integral no expoente:

$$I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx.$$

Usando nosso teorema, temos

$$I'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{x^t-1}{\ln x}\,dx = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{t+1}.$$

Logo $I(t) = \ln(1+t) + C$. Para achar a constante, fazemos $t = 0$ para zerar o integrando e obtemos $C = 0$. Logo

$$\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,dx = \ln(1+t)$$

e, em particular, para $t = 2$, obtemos $\ln 3$. □

Quando temos intervalos infinitos, deixamos de ter compacidade (que é uma condição necessária para aplicação), e precisamos de um pouco mais de cuidado.

Exemplo 2. Calcule
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Solução. Considere
$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-tx}\,dx.$$

Temos
$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-tx}\,dx = -\int_0^\infty e^{-tx}\operatorname{sen} x\,dx = -\int_0^\infty e^{-tx}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,dx \\
&= -e^{-tx}\cdot\left(\frac{e^{ix}}{2i(i-t)} + \frac{e^{-ix}}{2i(i+t)}\right)\Big|_0^\infty = e^{-tx}\cdot\left(\frac{(i+t)e^{ix}+(i-t)e^{-ix}}{2i(t^2+1)}\right)\Big|_0^\infty \\
&= e^{-tx}\cdot\left(\frac{t\operatorname{sen} x + \cos x}{t^2+1}\right)\Big|_0^\infty
\end{aligned}$$

Agora, temos que trabalhar com $x \to \infty$. O problema é que $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen} x$ e $\lim_{x\to\infty}\cos x$ não existem. Mas *se* $t > 0$ então e^{-tx} vai para zero e $t\operatorname{sen} x + \cos x$ é limitado. Então, usando o teorema do confronto,
$$I'(t) = 0 - \frac{1}{t^2+1} \quad \textbf{para } \mathbf{t > 0}.$$

Portanto, $I(t) = C - \arctan t$ para $t > 0$. Fazendo $t \to \infty$, vemos que, sendo $|\operatorname{sen} x/x| \le 1$,
$$|I(t)| \le \left|\int_0^\infty e^{-tx}\,dx\right| = \frac{1}{t} \to 0.$$

Logo $I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ para $t > 0$.

Isso sugere que $I(0) = \pi/2$, mas a nossa conta não prova isso. Precisamos de um pouco mais. Provaremos agora que

(i) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge;

(ii) a diferença $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}e^{-tx}\,dx = \int_0^\infty (1-e^{-tx})\frac{\operatorname{sen}}{x} x\,dx$ tende a zero quando $t \to 0_+$.

Em ambos os casos, separamos a integral em intervalos $[k\pi, (k+1)\pi)$, para obter uma sequência alternante. Comecemos com (i): seja $a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, e note que
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_{k\ge 0} a_k = \sum_{k\ge 0}(-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx.$$

Temos, então, uma sequência alternante. Basta, portanto, provar que $|a_k|$ é decrescente e tende a zero. De fato,
$$|a_{k+1}| = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x+\pi)|}{x+\pi}\,dx < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = |a_k|$$
e $|a_k| < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{x}\,dx < \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k} \to 0$.

A parte (ii) é mais complicada. Primeiro provamos que a integral converge. Do mesmo jeito, seja $I_k(t) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$. Como $1-e^{-tx} < 1$, $I_k(t) < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx < \frac{1}{k}$, ou seja, $I_k(t) \to 0$ quando $k \to \infty$. Agora vejamos que $I_k(t)$ é decrescente: temos $J(t) = I_k(t) - I_{k+1}(t) = 0$ para $t = 0$ e, usando mais uma vez a derivada da integral,
$$I'_{k+1}(t) = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-tx}|\operatorname{sen} x|\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t(x+\pi)}|\operatorname{sen}(x+\pi)|\,dx = e^{-t\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-tx}|\operatorname{sen} x|\,dx < I'_k(t).$$

Logo $J'(t) > 0$ e logo $J(t) > J(0) = 0 \iff I_k(t) > I_{k_1}(t)$, ou seja, a integral converge.

Pena que precisamos provar algo mais forte: que a integral tende a 0 quando $t \to 0_+$. Se truncarmos a série no termo N, o erro é menor ou igual ao módulo do próximo termo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k I_k(t) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k I_k(t) + r_N, \quad |r_N| \leq |I_{N+1}(t)| \leq \frac{1}{N+1}.$$

Usando a desigualdade $|1-e^{-tx}| \leq tx$, estimamos a soma parcial:

$$\left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k I_k(t)\right| \leq \int_0^{(N+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \leq \int_0^{(N+1)\pi} t\,dx = t(N+1)\pi.$$

Logo

$$\left|\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leq t(N+1)\pi + \frac{1}{N+1}.$$

Para cada $\epsilon > 0$, escolhemos N grande para o qual $\frac{1}{N+1} < \frac{\epsilon}{2}$ e, depois t pequeno o suficiente para que $t(N+1)\pi < \frac{\epsilon}{2}$. Com isso, o resultado segue, e finalmente podemos concluir que

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Cuidado: Sem compacidade ou continuidade, nem sempre a fórmula

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(t,x)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\,dx$$

é verdadeira.

Por exemplo, poderíamos (?) ter feito o exemplo anterior usando

$$I(t) = \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(tx)}{x}\,dx,$$

com

$$I'(t) = \int_0^{\infty}\cos(tx)\,dx.$$

Mas essa integral não faz sentido! Precisamos de critérios.

Teorema 2. *A igualdade*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(t,x)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\,dx.$$

é verdadeira em $t = t_0$, no sentido em que ambos os membros existem e são iguais[1] *se as duas condições a seguir são satisfeitas:*

- *$f(t,x)$ e $\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)$ são contínuas em t e x, com x no domínio da integração e t está em uma vizinhança de t_0;*
- *existem cotas superiores $|f(t,x)| \leq A(x)$ e $|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)| \leq B(x)$, ambas independentes de t, tais que $\int_a^b A(x)\,dx$ e $\int_a^b B(x)\,dx$ existem.*

A primeira condição não costuma dar problemas, mas a segunda é importante (conseguiu ver por que a ideia do $\operatorname{sen}(tx)/x$ dá errado?). No nosso primeiro exemplo, temos $f(t,x) = \frac{x^t-1}{\ln x}$, e $|f(x,t)| \leq \frac{1-x^t}{\ln x}$, que depende de t! Mas não há problemas, porque o teorema trata de t *localmente*. Podemos então escolher um c com $0 < t < c$, e temos $A(x) = \frac{1-x^c}{\ln x}$. Para $B(x)$, temos a derivada parcial igual a $x^t \leq 1$, então $B(x) = 1$ (note que aqui não temos problemas, já que estamos integrando de 0 a 1).

No segundo exemplo, escolhemos c com $t > c > 0$, $A(x) = e^{-cx}$ e $B(x) = e^{-cx}$.

Veja [1] para mais detalhes.

[1] Pode acontecer de ambos existirem e serem diferentes.

1.2 O velho truque da integral dupla

Outra técnica de integração pouco difundida é transformar uma integral simples em uma dupla. Há várias maneiras de fazer isso: elevando uma integral ao quadrado, introduzir uma variável e generalizar a integral...

Comecemos com um clássico.

Exemplo 3. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Solução. Sendo I a integral que queremos calcular,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Mudando para coordenadas polares, obtemos

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{r\to\infty} e^{-r^2}\right) = \pi.$$

Como $I > 0$, $I = \sqrt{\pi}$.

Para completar a demonstração, falta na verdade demonstrar que a integral converge. Mas isso é bem fácil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx < \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx + 2\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx < \infty.$$

□

Exemplo 4. Calcule (de novo)

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Solução. A ideia é transformar essa integral simples em uma integral dupla e trocar as variáveis de lugar, usando Fubini. É claro que é importante que a integral dupla seja convergente também. Ou seja, procuramos $f(x,y)$ e um intervalo I tal que

$$\int_I f(x,y)\,dy = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty}\int_I f(x,y)\,dy\,dx \text{ seja convergente.}$$

Uma escolha natural, considerando que $\int e^{-at}\,dt = -\frac{1}{a}e^{-at}$ (e vendo que exponenciais são as melhores coisas para convergência), é multiplicar por e^{-xy}:

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \operatorname{sen} x\,dy = -\frac{1}{x}e^{-xy}\operatorname{sen} x\Big|_0^{\infty} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Com isso, já trocando as variáveis, e usando uma integral que já fizemos antes,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx\,dy = \int_0^{\infty} \frac{-ye^{-xy}\operatorname{sen} x - e^{-xy}\cos x}{1+y^2}\Big|_0^{\infty}\,dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\Big|_0^{\infty}\,dy = \arctan y\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

2 Séries via integrais

Em muitos problemas, podemos encontrar somas de séries com integrais.

2.1 Introduzindo variáveis

Agora, vejamos uma demonstração "do livro" (retirada, é claro, do livro *Proofs from the Book*).

Exemplo 5. Prove que

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solução. Considere $f\colon (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{1-xy} = \sum_{n\geq 0}(xy)^n$. Primeiro, note que a integral de f sobre o quadrado $Q = [0,1]^2$ é

$$I = \int_Q f(x,y)\,dx,\,dy = \int_0^1\int_0^1 \sum_{n\geq 0}(xy)^n\,dx\,dy = \int_0^1 \sum_{n\geq 0}\frac{y^n}{n+1}\,dy = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)}^2 = \zeta(2).$$

Agora vamos calcular essa integral de outro jeito. Faça uma rotação do quadrado de 45°, ou seja, considere

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}.$$

Com isso,

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{2}{2-u^2+v^2}.$$

Logo, considerando Q vira o quadrado definido por $-u \leq v \leq u$ para $0 \leq u \leq \sqrt{2}/2$ e $-\sqrt{2}+u \leq v \leq \sqrt{2}-u$ para $\sqrt{2}/2 \leq u \leq \sqrt{2}$, e que temos uma simetria no eixo u, a nossa integral é

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du + 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du,$$

ou seja,

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\,du + 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\,du.$$

Agora, vamos nos livrar do arco tangente. Seja $\theta = \arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}$. Então $\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \iff u^2 = (2-u^2)\tan^2\theta \iff u^2 = \frac{2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 2\tan^2\theta\cos^2\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \iff u = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$, de modo que $du = \sqrt{2}\cos\theta d\theta = \sqrt{2-u^2}\,d\theta$. Que sorte! Como $u = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $u = \sqrt{2}/2 \iff \mathrm{sen}\,\theta = 1/2 \iff \theta = \pi/6$, e

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\,du = \int_0^{\pi/6}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\theta\sqrt{2-u^2}\,d\theta = \int_0^{\pi/6}\theta\,d\theta = \frac{\pi^2}{72}.$$

Para a segunda integral, seja $\phi = \arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}$, de modo que $(2-u^2)\tan^2\phi = 2 - 2\sqrt{2}u + u^2 \iff 2(1-\tan^2\phi) - 2\sqrt{2}u + (1+\tan^2\phi)u^2 = 0$, cujo discriminante é $8 - 8(1-\tan^4\phi) = 8\tan^4\phi$, e $u = \frac{\sqrt{2}(1\pm\tan^2\phi)}{1+\tan^2\phi}$. Adotando o sinal de menos (o de mais não tem muita graça...), obtemos $u = \sqrt{2}\cos 2\phi$. Agora, $du = -2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,2\phi\,d\phi = -2\sqrt{2-u^2}\,d\phi$. Sorte grande! Novamente, temos $\sqrt{2}\cos 2\theta = \sqrt{2}/2 \iff \theta = \pi/6$ e $\sqrt{2}\cos 2\theta = \sqrt{2} \iff \theta = 0$. Com isso,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\,du = \int_{\pi/6}^{0}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\phi(-2\sqrt{2-u^2})\,d\phi = \int_0^{\pi/6}2\phi\,d\phi = \frac{\pi^2}{36}.$$

Aí é só juntar tudo:

$$\zeta(2) = I = 4\left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

2.2 Somas de Riemann

Como muitos deve ter pulado no curso de cálculo, uma *soma de Riemann* é o limite que define a integral de Riemann: partilhando o intervalo $[a,b]$ em intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, \ldots, n$ e escolhendo um ponto x_i^*, se a função f é integrável em $[a,b]$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Muitas vezes, podemos escolher $x_i - x_{i-1} = c/n$ e $x_i^* = ci/n$, e aí obtemos a continha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{n} f\left(\frac{ci}{n}\right) = \int_0^c f(x)\,dx.$$

Com isso, várias contas de médias de sequências viram somas de Riemann. Começamos com um clássico.

Exemplo 6. Seja $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Solução. Temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Considerando $f(x) = \frac{1}{1+x}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

□

Dá para brincar com integrais duplas:

Exemplo 7. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{sen} \frac{i+j}{n}.$$

Solução. Sendo $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, temos uma soma de Riemann no triângulo definido por $x < y$, $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$ (o n está ao quadrado pois é um n para cada integral). Com isso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{sen} \frac{i+j}{n} = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 (-\cos(2y) + \cos y)\,dy = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2 + \operatorname{sen} 1.$$

□

3 Alguns fatos aleatórios que podem ser úteis

3.1 Limite e integrais

Fato 1. *Sendo f uma função derivável em $[0,1]$, prove que*

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^1 x^r f(x)\,dx = 0 \quad e \quad \lim_{r\to\infty} r \int_0^1 x^r f(x)\,dx = f(1).$$

Demonstração. A ideia é que x^r fica muito pequeno, exceto quando x fica perto de 1, então dividimos o intervalo $[0,1]$ em $[0,1-\epsilon]$ e $[1-\epsilon,1]$. Temos

$$\int_0^1 x^r f(x)\,dx = \int_0^{1-\epsilon} x^r f(x)\,dx + \int_{1-\epsilon}^1 x^r f(x)\,dx.$$

A primeira integral é fácil de limitar:

$$\left|\int_0^{1-\epsilon} x^r f(x)\,dx\right| \le \max_{0\le x\le 1-\epsilon} |f(x)| \int_0^{1-\epsilon} x^r\,dx = \max_{0\le x\le 1-\epsilon} |f(x)| \frac{(1-\epsilon)^{r+1}}{r+1} \to 0$$

A segunda integral não é muito pior:

$$\begin{aligned}\left|\int_{1-\epsilon}^1 x^r f(x)\,dx\right| &= \left|\int_0^{\epsilon} (1-x)^r f(1-x)\,dx\right| \le \max_{0\le x\le\epsilon} |f(1-x)| \int_0^{\epsilon} (1-x)^r\,dx \\ &= \max_{0\le x\le\epsilon} |f(1-x)| \frac{1-(1-\epsilon)^{r+1}}{r+1} \to 0\end{aligned}$$

O outro limite é mais interessante: integrando por partes, temos

$$(r+1)\int_0^1 x^r f(x)\,dx = x^{r+1} f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{r+1} f'(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 x^{r+1} f'(x)\,dx.$$

Aí é só fazer $r\to\infty$ e usar o primeiro limite com f' no lugar de f. O $r+1$ pode ser facilmente ajeitado tirando $\int_0^1 x^r f(x)\,dx$, que também tende a zero. $\square$

3.2 Séries e análise complexa

Fato 2. *Seja $f(z)$ uma função meromorfa com uma quantidade finita de pólos não inteiros simples $z_1,\dots,z_n$. Então, observando que os pólos de $\cot(\pi z)$ são os inteiros, e sendo $|f(z)| \le M/|z|^\alpha$ para algum $\alpha > 1$,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\pi f(z)\cot(\pi z), z = z_j].$$

Demonstração. O resultado segue quase que imediatamente do teorema dos resíduos de Cauchy. De fato, usando um retângulo γ a ser escolhido,

$$\oint_\gamma \pi f(z)\cot(\pi z) = 2\pi i \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Res}[\pi f(z)\cot(\pi z), k] + 2\pi i \sum_1^n \operatorname{Res}[\pi f(z)\cot(\pi z), z = z_j]$$

Calculemos os resíduos primeiros. Sendo $\operatorname{sen}(x+k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen} x$ e $\cos(k\pi) = (-1)^k$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[\pi f(z)\cot(\pi z), k] &= \lim_{z\to k}(z-k)\pi f(z)\cot(\pi z) = \lim_{z\to k} \frac{z-k}{(-1)^k \operatorname{sen}(\pi(z-k))}\pi f(z)\cos(\pi z) \\ &= \frac{1}{(-1)^k\pi}\pi f(k)\cdot(-1)^k = f(k).\end{aligned}$$

Agora, tomamos N grande e consideramos γ como o quadrado definido por $x = \pm(N+1/2)$ e $y = \pm(N+1/2)$. Vamos trabalhar na integral dividindo a região em partes.

- $z = N + 1/2 + yi$, $|y| \le 1/2$:

$$|\cot(\pi z)| = \left|\cot\left(\pi\left(N + \frac{1}{2} + iy\right)\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| = |\tanh(\pi y)| \le \tanh\frac{\pi}{2}.$$

- $z = -(N + 1/2) + yi$, $|y| \leq 1/2$: analogamente, $|\cot(\pi z)| \leq \tanh(\pi/2)$.
- $y > 1/2$:

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| \leq \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$$

- $y < -1/2$: analogamente, $|\cot(\pi z)| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$.

Então $|\cot(\pi z)|$ é limitado por uma constante C e temos

$$\left|\oint_\gamma \pi f(z)\cot(\pi z)\right| \leq C \cdot (8N + 4)\frac{1}{N^\alpha} \to 0$$

quando $N \to \infty$. Com isso, a integral tende a zero e temos

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) + 2\pi i \sum_1^n \operatorname{Res}[\pi f(z)\cot(\pi z), z = z_j],$$

e o resultado segue. □

Note que a demonstração acima pode ser adaptada para pólos múltiplos e para quando alguns dos pólos são inteiros.

Exemplo 8. Seja x real. Calcule

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + x^2}.$$

Solução. Basta calcular os resíduos em $z = \pm ix$:

$$\lim_{z\to ix}(z - ix)\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2 + x^2} = \frac{\pi\cot(i\pi x)}{2ix} \quad \text{e} \quad \lim_{z\to -ix}(z + ix)\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2 + x^2} = \frac{\pi\cot(-i\pi x)}{-2ix}.$$

Assim,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + x^2} = -\frac{\pi\cot(i\pi x)}{2ix} - \frac{\pi\cot(-i\pi x)}{-2ix} = \frac{\pi}{x}\coth(\pi x).$$

Note que podemos calcular também

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x}\coth(\pi x) - \frac{1}{2x}.$$

□

Fica a cargo do leitor provar:

Fato 3. *Seja $f(z)$ uma função meromorfa com uma quantidade finita de pólos não inteiros simples $z_1, \ldots, z_n$. Então, observando que os pólos de* $\operatorname{cosec}(\pi z)$ *são os inteiros, e sendo $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$ para algum $\alpha > 1$,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k f(k) = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}[\pi f(z)\operatorname{cosec}(\pi z), z = z_j].$$

3.3 Sequências $a_{n+1} = a_n^2 - 2$

Fato 4. *Se $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ então $a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Para a_0 real, se $|a_0| > 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$; se $|a_0| < 2$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ e podemos escrever $a_n = 2\cos(2^n\theta)$.*

Demonstração. Escolha α tal que $a_0 = \alpha + 1/\alpha$. Então $a_1 = a_0^2 - 2 = \alpha^2 + 1/\alpha^2$, e o resultado sai por indução.

Note que $a_0 = \alpha + 1/\alpha \iff \alpha^2 - a_0\alpha + 1 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = a_0^2 - 4$. Se $|a_0| > 2$, é imediato que $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $|a_0| < 2$, a equação admite duas raízes conjugadas α e $\overline{\alpha}$ cujo produto é 1, ou seja, $a_0 = \alpha + 1/\alpha = \alpha + \overline{\alpha} = 2\Re(\alpha) = 2\cos\theta$. Substituindo em a_n temos $a_n = 2\Re(\alpha^{2^n}) = 2\cos(2^n\theta)$. $\square$

Exemplo 9. (IMC 2010) Defina $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

Solução. Seja α tal que

$$x_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha} \iff \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Então $x_n = \phi^{2^n} + \phi^{-2^n}$. O produto do numerador é

$$\begin{aligned}(\phi + \phi^{-1})(\phi^2 + \phi^{-2})\dots(\phi^{2^n} + \phi^{-2^n}) &= \frac{(\phi - \phi^{-1})(\phi + \phi^{-1})(\phi^2 + \phi^{-2})\dots(\phi^{2^n} + \phi^{-2^n})}{\phi - \phi^{-1}} \\ &= \frac{(\phi^2 - \phi^{-2})(\phi^2 + \phi^{-2})\dots(\phi^{2^n} + \phi^{-2^n})}{\phi - \phi^{-1}} \\ &= \frac{\phi^{2^{n+1}} - \phi^{-2^{n+1}}}{\phi - \phi^{-1}}\end{aligned}$$

Mas $\phi - \phi^{-1} = 1 + \phi^{-1} - \phi^{-1} = 1$, logo o limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{2^{n+1}} - \phi^{-2^{n+1}}}{\phi^{2^{n+1}} + \phi^{-2^{n+1}}} = 1.$$

Note que é possível generalizar para $x_1 > 2$: a resposta é

$$\frac{1}{\alpha - \alpha^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 4}}.$$

$\square$

4 Problemas

1. Prove o fato 3 e calcule
$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{x^2 + k^2}.$$

2. (Putnam 2014) Prove que todo coeficiente não nulo da série de Taylor de $(1 - x + x^2)e^x$ em torno de $x = 0$ é um racional cujo numerador (após simplificado) é 1 ou primo.

3. (Putnam 2014) Seja $a_0 = 5/2$ e $a_k = a_{k-1}^2 - 2$ para $k \geq 1$. Calcule
$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

4. (Putnam 2014) Seja $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$. Prove que os polinômios $P_j(x)$ e $P_k(x)$ são primos entre si para todos j, k inteiros positivos com $j \neq k$.

5. (Putnam 2014) Suponha que f é uma função de domínio $[1, 3]$ tal que $-1 \leq f(x) \leq 1$ para todo x e $\int_1^3 f(x)\, dx = 0$. Qual é o maior valor possível de $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\, dx$?

6. (Putnam 2014)[2] Prove que, para cada inteiro positivo n, todas as raízes do polinômio

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)} x^k$$

são reais.

7. (Putnam 2011) Encontre um real c e um real positivo L para os quais

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^c \int_0^{\pi/2} x^r \operatorname{sen} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} x^r \cos x\, dx} = L.$$

8. (Putnam 2009) Seja $f\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas em $(0, 1)^2$. Sejam $a = \int_0^1 f(0, y)\, dy$, $b = \int_0^1 f(1, y)\, dy$, $c = \int_0^1 f(x, 0)\, dx$ e $d = \int_0^1 f(x, 1)\, dx$. Verdadeiro ou falso: existe necessariamente um ponto (x_0, y_0) em $(0, 1)^2$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b - a$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = d - c$.

9. (Putnam 2008) Seja $F_0(x) = \ln x$. Para $n \geq 0$ e $x > 0$, defina $F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)\, dt$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, F_n(1)}{\ln n}.$$

10. (Putnam 2008) Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com derivada contínua tais que, para todo racional q, $f(q)$ é racional e tem o mesmo denominador que q.

11. (Putnam 2007) Suponha que $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tem derivada contínua e $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Prove que, para todo $\alpha \in (0, 1)$,

$$\left| \int_0^\alpha f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{8} \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|.$$

12. (Putnam 2006) Para cada função contínua $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, seja $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$ e $J(f) = \int_0^1 x(f(x))^2 dx$. Calcule o máximo de $I(f) - J(f)$.

13. (Putnam 2005) Calcule

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, dx.$$

14. (Putnam 2005) Seja S_n o conjunto das permutações de $1, 2, \ldots, n$. Para $\pi \in S_n$, seja $\sigma(\pi) = 1$ se π é uma permutação par e $\sigma(\pi) = -1$ se π é uma permutação ímpar. Finalmente, seja $\nu(\pi)$ o número de pontos fixos de π. Prove que

$$\sum_{\pi\in S_n} \frac{\sigma(\pi)}{1 + \nu(\pi)} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

[2] Parece que a Putnam foi a "olimpíada norte-americana de Cálculo" em 2014...

15. (OBM 2011) A função $f\colon [0,+\infty)?\mathbb{R}$ é contínua em $[0,+\infty)$, derivável em $(0,+\infty)$ e satisfaz

$$f(x+1)=\cos(f(x))$$

para todo $x\in[0,+\infty)$. Sabemos que $f(0)=0$ e $f'(2)=1$. Mostre que existe um único número real d tal que o limite abaixo exista e pertença a $(0,+\infty)$:

$$a=\lim_{x\to 0_+}\left|\frac{f(x)}{x^d}\right|.$$

Determine os valores de d e de a.

16. (OBM 2010) Calcule

$$\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx.$$

17. (OBM 2009) Seja $f\colon[0,1]\to[0,1]$ crescente, derivável e inversível.

Se $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$, prove que existem dois reais diferentes a e b, $0\le a<b\le 1$, tais que $f'(a)=f'(b)=1$.

18. (OBM 2009) Considere a sequência $a_0,a_1,a_2,\ldots$ definida por $a_0=0$, $a_1=\pi/3$ e, para $n\ge 1$,

$$a_{n+1}=\frac{\pi(a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}\cdots+a_na_0}{3(n+1)}.$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots.$$

19. (OBM 2008) Seja $P_n=\sum_{0\le k\le n}\operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi k}{n}\right)$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_nP_{n+1}}{n}.$$

20. (OBM 2008) Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{(\lambda+n^2)^2}<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+n^2},\quad \forall\lambda\ge 0.$$

21. (OBM 2005) Sejam f e g funções contínuas distintas de $[0,1]$ em $(0,+\infty)$ tais que $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$.

Para $n\ge 0$, seja $y_n=\int_0^1\frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n}\,dx$.

Prove que $(y_n)_{n\ge 0}$ é uma sequência crescente e divergente.

22. (OBM 2004) Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

23. (OBM 2003) Defina $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2-2$.

Prove que $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln a_n}{n}=\ln 2$ e calcule $\lim_{n\to\infty}(\ln\ln a_n-n\ln 2)$.

24. (OBM 2001) Para todo real u, seja $I(u)=\int_0^{\pi}\ln(1-2u\cos x+u^2)\,dx$.

(a) Prove que $I(u)=I(-u)=\frac{1}{2}I(u^2)$.

(b) Calcule $I(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

25. (OBM 2001) O centro de massa de uma lata cilíndrica de refrigerante tem a mesma posição quando a lata está vazia ou cheia. Se a massa da lata vazia é m e a massa do refrigerante dentro da lata cheia é M, determine a fração de refrigerante que deve ser deixado na lata para que seu centro de massa fique o mais baixo possível.

26. (IMC 2014) Seja $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x > 0$, e n um inteiro positivo. Prove que $|f^{(n)}(x)| < \frac{1}{n+1}$, em que $f^{(n)}$ denota a n-ésima derivada de f.

27. (IMC 2005) Seja $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função continuamente derivável. Prove que

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\, dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\, dx \right| \le \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 .$$

28. (Ibero 2000) Seja $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}}$ para $n > 1$. Encontrar

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - \sqrt{2n}).$$

5 Referências bibliográficas

1. Keith Conrad, *Differentiating under the integral sign*, disponível em
`http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/diffunderint.pdf`

2. Noah A. Hughes, *Infinite Series and the Residue Theorem*, disponível em
`http://www.supermath.info/InfiniteSeriesandtheResidueTheorem.pdf`

3. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, segunda edição.