



PROBLEMAS DE LÓGICA

Prof. Élio Mega

ALGUNS CONCEITOS DA LÓGICA MATEMÁTICA

- Sentença é qualquer afirmação que pode ser classificada de verdadeira (V) ou falsa (F) (e exatamente uma dessas coisas, sem ambiguidade).

Não são sentenças, por exemplo:

- Bom dia!
- Que horas são?
- $2 + 2$
- $x + 2 = 4$

São sentenças:

- A Terra é esférica.
- O átomo é indivisível.
- A soma de dois números ímpares é um número par.



ALGUNS CONCEITOS...

- Sentença aberta: transforma-se em sentença pela substituição das variáveis (letras) por nomes ou pela anexação de quantificadores.
- Pela substituição de variáveis (exemplo):
 - $x + 2 = 4$ (não é V nem F) . Substituindo-se x :
 - $3 + 2 = 4$ (F)
 - $2 + 2 = 4$ (V)
- Pela colocação de \forall ou \exists (quantificadores)
 - $\forall x; x + 2 = 4$ (F)
 - $\exists x; x + 2 = 4$ (V)

Obs: as variáveis representam objetos de um certo universo de discurso. Doravante, nosso universo é o conjunto dos números reais.



ALGUNS...

- Representando sentenças por p , q , r , ... , podemos usá-las para formar novas sentenças com o auxílio dos conectivos lógicos.

Negação de uma sentença

Sendo p uma sentença, a sua negação é representada por $\sim p$.

Exemplo: seja p a sentença **O número 7 é primo**. Sua negação é a sentença $\sim p$, que deve ser lida como **Não é verdade que o número 7 seja primo**. ou **O número 7 não é primo**.

Quando p é uma sentença V, sua negação é F e, ao contrário, se p é F, então $\sim p$ é V.



ALGUNS...

Disjunção

Sendo p e q sentenças, a sentença

$$p \vee q$$

(lê-se p ou q) é chamada **disjunção**. Uma disjunção é F apenas quando as duas sentenças p e q são F.

Por exemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \vee \sqrt{9} = 3 (V)$$

$$\sqrt{4} = 2 \vee \sqrt{4} = -2 (V)$$

$$\sqrt{4} = -2 \vee \sqrt{4} = 2 (V)$$

$$\sqrt{4} = -2 \vee \sqrt{9} = -3 (F)$$



ALGUNS...

Disjunção exclusiva

Sendo p e q sentenças, a sentença

$$p \underline{\vee} q$$

(lê-se p ou q mas não ambos) é chamada **disjunção exclusiva**, que é V apenas quando uma das sentenças p, q é V. Por exemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \underline{\vee} \sqrt{9} = 3 (\text{F})$$

$$\sqrt{4} = 2 \underline{\vee} \sqrt{4} = -2 (\text{V})$$

$$\sqrt{4} = -2 \underline{\vee} \sqrt{4} = 2 (\text{V})$$

$$\sqrt{4} = -2 \underline{\vee} \sqrt{9} = -3 (\text{F})$$



ALGUNS...

Implicação ou condicional

Sendo p e q sentenças, a sentença

$$p \Rightarrow q$$

(lê-se p implica q , se p então q , p é suficiente para q , q é condição necessária para p , etc.) é chamada **implicação ou condicional**, que é F apenas quando p é V e q é F. $\forall x; x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Por exemplo, $x = 2$ é uma sentença V, pois é impossível que a primeira sentença seja V e a segunda seja F para qualquer valor de x (experimente substituir o x por 4 ou por 2). Por outro lado, a sentença

é F.



ALGUNS...

Bi-implicação ou bicondicional

Sendo p e q sentenças, a sentença

$$p \Leftrightarrow q$$

(lê-se p se, e somente se q , p é condição suficiente e necessária para q) é chamada **bi-implicação ou bicondicional**, que é V apenas quando as duas sentenças forem V ou as duas sentenças forem F. Por exemplo, é V a sentença abaixo:

$$\forall x; x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$



ALGUNS...

Podemos simbolizar a sentença **Todos os números são reais** por $\forall x; Rx$. No nosso universo, esta é uma sentença verdadeira. A sentença **Alguns números são reais** ou **Existe pelo menos um número real** (etc.), pode ser simbolizada por $\exists x; Rx$ e também é V.

A negação da primeira é $\sim (\forall x; Rx)$ ou $\exists x; \sim Rx$
e a negação da segunda é $\sim (\exists x; Rx)$ ou $\forall x; \sim Rx$.

Como é que devemos ler essas sentenças?

Elas são V ou F?



ALGUNS...

A sentença $p \vee \sim p$ é uma tautologia (verdadeira, qualquer que seja a sentença p).

A sentença $p \wedge \sim p$ é uma contradição (falsa, qualquer que seja a sentença p).

Supondo que p é a sentença

$\sqrt{2}$ é um número racional

como você expressaria cada uma das sentenças acima?



ALGUNS...

Esquema de argumentação (linguagem simbólica, linguagem natural): se são verdadeiras as sentenças p e q , então é verdadeira a sentença r .

Caso p seja F, o que se pode concluir?

Usualmente, quando demonstramos um teorema em Matemática, desenvolvemos uma cadeia de implicações partindo de uma sentença V . Há outras formas de demonstração, como a redução ao absurdo. Neste tipo de demonstração negamos o que pretendemos demonstrar para chegar a uma contradição, ficando provada a sentença inicial.



E VAMOS AOS PROBLEMAS...

Um problema clássico

Você está numa cela onde existem duas portas, cada uma vigiada por um guarda. Existe uma porta que dá para a liberdade e outra, para a morte. Você está livre para escolher a porta que quiser e por ela sair. Poderá fazer apenas uma pergunta a um dos dois guardas que vigiam as portas. Um dos guardas sempre fala a verdade e o outro sempre mente e você não sabe quem é o mentiroso e quem fala a verdade. Que pergunta você faria?



FUVEST

O número $x = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}$ é racional.

- a) Usando as propriedades das potências, calcule x .
- b) Prove que existem dois números irracionais α e β tais que α^β é racional.



FUVEST

Cada um dos cartões abaixo tem de um lado um número e do outro lado uma letra.



Alguém afirmou que todos os cartões que têm uma vogal numa face têm um número par na outra. Para verificar se tal afirmação é verdadeira

- a) é necessário virar todos os cartões.
- b) é suficiente virar os dois primeiros cartões.
- c) é suficiente virar os dois últimos cartões.
- d) é suficiente virar os dois cartões do meio.
- e) é suficiente virar o primeiro e o último cartão.



CANGURU 2009 NÍVEL C

15. Na ilha dos verazes e mentirosos, 25 pessoas esperam numa fila. Todo mundo, exceto a primeira pessoa da fila, diz que a pessoa da frente é um mentiroso. O primeiro da fila disse que todos atrás dele são mentirosos. Quantos mentirosos há na fila? (os verazes sempre dizem a verdade, ao passo que os mentirosos sempre falam mentira)

- (A) 0 (B) 12 (C) 13 (D) 24
(E) Impossível determinar



CANGURU 2010 NÍVEL C

25. Numa sala de reunião havia algumas pessoas que diziam somente a verdade e as demais somente mentiam. Num dado momento, três pessoas fizeram as afirmações a seguir.

1ª pessoa: “Não há mais do que três pessoas nesta sala. Todos nós somos mentirosos.”

2ª pessoa: “Não há mais do que quatro pessoas nesta sala. Alguns não são mentirosos.”

3ª pessoa: “Há cinco pessoas nesta sala. Três são mentirosas.”

Quantas pessoas havia na sala e quantas entre elas eram mentirosas?

- (A) 3 pessoas, 1 mentirosa
- (B) 4 pessoas, 1 mentirosa
- (C) 4 pessoas, 2 mentirosas
- (D) 5 pessoas, 2 mentirosas
- (E) 5 pessoas, 3 mentirosas



CANGURU 2012 NÍVEL J

24. Num reino submarino há polvos de 6, 7 e 8 tentáculos. Os polvos de 7 tentáculos sempre mentem, mas os de 6 e 8 tentáculos sempre dizem a verdade. Num certo dia, quatro polvos se reúnem. O polvo azul diz: “Juntos, temos 28 tentáculos”; o polvo verde diz: “Juntos, temos 27 tentáculos”. Aí vem o amarelo que diz: “Juntos, temos 26 tentáculos” e o vermelho encerra a discussão dizendo: “Juntos temos 25 tentáculos”. Qual é a cor do polvo que está dizendo a verdade?

- (A) azul **(B)** verde (C) vermelha
(D) amarela (E) nenhuma dessas cores



CANGURU 2012 NÍVEL J

18. Três esportistas, Can, Gu e Ru, participaram de uma maratona. Antes do início da corrida, quatro espectadores discutem as chances de vitória dos três corredores:

O primeiro diz: “Um dos dois, Can ou Gu, irá vencer”.

O segundo: “Se Gu for o segundo, Ru irá vencer”.

O terceiro: “Se Gu for o terceiro, Can não irá vencer”.

O quarto: “Um dos dois, Gu ou Ru, será o segundo”.

Terminada a corrida, verificou-se que todas as afirmações acima estavam corretas. Qual foi a ordem de chegada dos corredores?

- (A) Can, Gu, Ru (B) Can, Ru, Gu (C) Ru, Gu, Can
(D) Gu, Ru, Can (E) Gu, Can, Ru



OBMEP 2013 N1

19. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?”



Guto disse: “Não foi o meu”, Carlos disse: “Foi o meu” e Bernardo disse: “Não foi o do Guto”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

- A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
- B) Bernardo mentiu.
- C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
- D) Carlos mentiu.
- E) Guto falou a verdade.



CANGURU 2012 NÍVEL S

30. Todo gato no País das Maravilhas é sábio ou louco. Se um gato sábio estiver em uma sala onde há mais três gatos loucos, então ele também se torna louco. Se um gato louco estiver com outros três gatos sábios numa mesma sala, então ele será declarado louco pelos gatos sábios. Três gatos entraram numa sala vazia e assim que um 4º gato entrou nessa sala, o 1º que tinha entrado, saiu. Assim que o 5º gato entrou, saiu o 2º que tinha entrado, etc. Depois que o 2012º gato entrou, aconteceu pela primeira vez de um gato ser declarado louco. Quais dos dois gatos a seguir poderiam estar loucos logo depois de entrar na sala?

- (A) O 1º e o 2011º (B) O 2º e o 2010º (C) O 3º e o 2009º
(D) O 4º e o 2012º (E) O 2º e o 2011º

