# Alguns problemas de teoria dos números da IMO

Carlos Gustavo Moreira - IMPA

**1)** (P3-IMO-1988). Prove que se $a$ e $b$ são inteiros positivos e $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um inteiro então $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.

**2)** (P5-IMO-1989). Prove que, para todo inteiro positivo $n$, existem $n$ inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é potência de primo.

**3)** (P3-IMO-1990). Determine todos os inteiros positivos $n$ tais que $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ é inteiro.

**4)** (P6-IMO-1991). Uma sequência infinita $x_0, x_1, x_2, ...$ de números reais é dita *l*imitada se existe uma constante $C$ tal que $|x_i| \le C, \forall i \ge 0$.

Dado um número real $\alpha > 1$. construa uma sequência infinita limitada $x_0, x_1, x_2, ...$ tal que $|x_i - x_j||i-j|^\alpha \ge 1$ para todo par de naturais distintos $i, j$.

**5)** (P6-IMO-1994). Prove que existe um conjunto $A$ de inteiros positivos com a seguinte propriedade: para cada conjunto infinito $S$ de primos, existem dois inteiros positivos $m \in A$ e $n \notin A$, cada um dos quais sendo produto de $k$ elementos distintos de $S$ para algum $k \ge 2$.

**6)** (P3-IMO-1998). Para cada inteiro positivo $n$, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de $n$ (incluindo 1 e $n$). Determine todos os inteiros positivos $k$ tais que $d(n^2)/d(n) = k$ para algum inteiro positivo $n$.

**7)** (P5-IMO-2000). É possível encontrar $N$ divisível por exatamente 2000 primos distintos tal que $N$ divide $2^N + 1$ ? [$N$ pode ser divisível por potências de primos.]

**8)** (P6-IMO-2003). Prove que, para todo primo $p$, existe um primo $q$ tal que, para todo inteiro positivo $n$, $n^p - p$ não é divisível por $q$.

**9)** (P4-IMO-2005). Consideremos a sequência infinita $a_1, a_2, ...$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \forall n \ge 1.$$

Determine todos os inteiros positivos que são coprimos com todos os termos da sequência.

**10)** (P5-IMO-2007). Prove que se $a$ e $b$ são inteiros positivos tais que
$4ab - 1 \mid (4a^2-1)^2$ então $a = b$.

**11)** (P3-IMO-2008). Prove que existe um número infinito de inteiros positivos $n$ tais que $n^2+1$ tem um divisor primo maior que $2n + \sqrt{2n}$.