Como resolver problemas difíceis usando Bhaskara

Carlos Shine

1 Alguns fatos que você deve saber

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seja também $\Delta = b^2 - 4ac$ o *discriminante* de f. Então

- (Equação do segundo grau) Se $\Delta \geq 0$ então $f(x) = 0 \iff x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Se $\Delta < 0$ então $f(x)$ nunca é igual a zero. Note que se $\Delta = 0$ só existe um valor de x tal que $f(x) = 0$, que é $-\frac{b}{2a}$.
- (Soma e produto) Sejam x_1, x_2 as raízes de f para $\Delta \geq 0$ (se $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$. Então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- (Fatoração) Sejam x_1, x_2 as raízes de f para $\Delta \geq 0$. Então $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Isso pode ser generalizado para polinômios de grau maior: se temos todas as raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (possivelmente com repetições), $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.
- (Equação dadas raízes) Note que o fato anterior pode ser usado "ao contrário": uma equação de segundo grau com raízes r e s é $(x - r)(x - s) = 0 \iff x^2 - (r + s)x + rs = 0$.
- (Sinal de f) Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes de f. Então $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para $x < x_1$ ou $x > x_2$ e sinal contrário de a para $x_1 < x < x_2$; se $\Delta = 0$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo x real exceto $x = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; se $\Delta < 0$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a para todo x real.
- (Sinal de f, situação inversa) Se $f(x) \geq 0$ para todo x real então $a > 0$ e $\Delta \leq 0$.
- (Existência de raízes) Se $a \cdot f(r) < 0$ para algum r real então $f(x)$ tem duas raízes reais distintas.
- (Imagem de f) Se $a > 0$, os valores que f assume são todos os reais maiores ou iguais a $-\frac{\Delta}{4a}$, ou seja, $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, com igualdade para $x = -\frac{b}{2a}$. Se $a < 0$, $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, com igualdade para $x = -\frac{b}{2a}$.
- (Pesquisa de raízes) Se $f(s) \cdot f(t) < 0$, então existe uma raiz de f no intervalo $]s, t[$.

Agora tente resolver os problemas a seguir.

1. (OBM) a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$, e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.
2. (Romênia) Sejam a, b, c, $a \neq 0$, tais que a e $4a + 3b + 2c$ têm o mesmo sinal. Mostre que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não pode ter duas raízes no intervalo $(1, 2)$.
3. Seja a um número inteiro positivo ímpar. Determine a de modo que a equação $x^2 - ax + 4a = 0$ tenha as duas raízes inteiras.
4. Resolver (numericamente!) a equação
$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$
sabendo que admite uma raiz inteira.

5. (Rússia) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ têm exatamente uma raiz real em comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + cx + b = 0$ também têm exatamente uma raiz real em comum. Determine a soma $a + b + c$.

6. Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^2 + b^2$ é um número primo. Prove que a equação $x^2 + ax + b + 1 = 0$ não tem soluções inteiras.

7. Prove que, para $0 \le x, y, z \le 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \le x^2y + y^2z + z^2x + 1$.

8. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio com a, b, c inteiros, $a \neq 0$ com a seguinte propriedade: para todo inteiro positivo n existe um inteiro positivo c_n tal que n divide $f(c_n)$. Prove que f tem raízes racionais.

9. Sejam a, b, c inteiros que representam lados de um triângulo. Prove que:
   (a) se a equação $x^2 + (a + 1)x + b - c = 0$ tem raízes inteiras então o triângulo é isósceles.
   (b) se a equação $x^2 + (2ab + 1)x + a^2 + b^2 - c^2 = 0$ tem raízes inteiras então o triângulo é retângulo.
   (c) se a equação $x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 1)x + ab + bc + ca = 0$ tem raízes inteiras então o triângulo é equilátero.

10. Prove que se a, b, c são reais tais que $5a + 4b + 6c = 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0, 2]$.

11. Dado um polinômio $P(x)$, seja $S(P(x))$ a soma dos quadrados de seus coeficientes. Dado $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$ encontre um polinômio $g(x)$ tal que $S(f(x)^n) = S(g(x)^n)$ para todo inteiro positivo n e $g(0) = 1$.

12. Sejam a e b reais tais que $9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6$. Prove que $7a + 5b + 12ab \le 9$.

13. Dados reais a, b, c, prove que as raízes da equação

$$a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - a)(x - b) = 0$$

são reais.

14. Prove a *desigualdade de Cauchy-Schwartz*: sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

(Dica: considere a função quadrática $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$. O que você pode dizer do discriminante dele?)

15. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais cuja soma é zero e cuja soma dos quadrados é 1. Prove que existem dois deles, x_i, x_j, tais que $x_ix_j \le -\frac{1}{n}$.

16. (Rússia) O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem três raízes reais distintas. O polinômio $P(Q(x))$, sendo $Q(x) = x^2 + x + 2001$, não tem raízes reais. Prove que $P(2001) > \frac{1}{64}$.

17. (Rússia) Seja $f(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $f(f(x)) = 0$ tem quatro raízes reais distintas, e que a soma de duas dessas raízes é -1. Prove que $b \le -\frac{1}{4}$.

18. (Rússia) sejam f e g polinômios mônicos de grau 2 tais que $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$ não têm soluções reais. Prove que pelo menos uma das equações $f(f(x)) = 0$ e $g(g(x)) = 0$ também não tem soluções reais.

19. (Rússia) Sejam a, b, c reais. Prove que pelo menos uma das equações $x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$, $x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$, $x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ tem soluções reais.

20. (Rússia) Os números de 51 a 150 são colocados em um tabuleiro 10×10, um número em cada casa. É possível fazer isso de modo que, para quaisquer dois números a, b que estão em casas que têm um lado em comum, pelo menos uma das equações $x^2 - ax + b = 0$ e $x^2 - bx + a = 0$ tem soluções inteiras?

21. (Rússia) Sejam a e b reais distintos tais que $(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$ não tem soluções reais em x. Prove que $20(b - a)$ não é inteiro.

22. (Rússia) Esmerova e Jadova escrevem números em seus respectivos cadernos: Esmerova escreveu 1 e 2 e Jadova, 3 e 4. Em seguida, cada uma escreve uma equação cujas raízes são os números nos seus respectivos cadernos. Esmerova escreve $f(x) = 0$ e Jadova, $g(x) = 0$. Em seguida, a cada minuto, se $f(x) = g(x)$ tem duas raízes reais distintas, uma das garotas troca seus números pelas duas raízes dessa equação e faz tudo de novo. Caso contrário, nada acontece. Se Esmerova, em algum momento, escreveu o número 5, qual é o outro número que ela escreveu junto com 5?

23. (Rússia) Um polinômio quadrático mônico $P(x)$ é tal que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Prove que $P(0) \cdot P(1) = 0$.

24. (ZIMO) Seja $P(x)$ um polinômio quadrático. Prove que existe um inteiro positivo n tal que a equação $P(x) = \frac{1}{n}$ não tem soluções racionais.

25. (OBM) Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo inteiro positivo n, $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$ tem pelo menos uma raiz real.

26. (OBM) Seja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f(0) \neq 0$, $f(f(0)) \neq 0$,

$$\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(0))\ldots) = 0.$$

Prove que

$$\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots) = x$$

para todo x onde esta expressão estiver bem definida.

27. (OBM) É dada uma equação do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$ com raízes inteiras a_1 e b_1. Consideramos a equação do segundo grau $x^2 + a_1x + b_1 = 0$. Se a equação $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ tem raízes inteiras a_1 e b_2, consideramos a equação $x^2 + a_2x + b_2 = 0$. Se a equação $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ tem raízes inteiras a_3 e b_3, consideramos a equação $x^2 + a_3x + b_3 = 0$. E assim por diante. Se encontrarmos uma equação com $\Delta < 0$ ou com raízes que não sejam números inteiros, encerramos o processo.

Exemplos:

- $x^2 - 3x + 2 = 0 \to x^2 + 2z + 1 = 0 \to x^2 - x - 1 = 0$ e não podemos continuar, pois as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, números não inteiros.
- $x^3 - 3x + 2 = 0 \to x^2 + x + 2 = 0$ e não podemos continuar, pois $\Delta = -7 < 0$, $x^2 = 0 \to x^2 = 0 \to \ldots$ neste caso podemos continuar o processo indefinidamente (isto é, em nenhuma equação obtida ocorre $\Delta < 0$ ou raízes não inteiras).

(a) Determine uma outra equação que, como $x^2 = 0$, nos permita continuar o processo indefinidamente.

(b) Determine todas as equações do segundo grau completas a partir das quais possamos continuar o processo indefinidamente.