

Quem conta um conto aumenta vários pontos

Carlos Shine

1 Princípio aditivo e multiplicativo

O modo matemático mais eficaz de se modelar problemas de contagem é utilizar conjuntos, de modo que todo problema de contagem se resume a encontrar a cardinalidade de conjuntos. A principal vantagem desse método é que podemos utilizar as seguintes fórmulas de conjuntos: denotando $|A|$ como o número de elementos de A e sendo A e B conjuntos de um universo U , temos:

- $A \subset B$ se, e somente se, para todo $x \in U$, $x \in A \implies x \in B$ (inclusão)
- $A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$ (interseção)
- $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (união)
- $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (subtração de conjuntos)
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ (produto cartesiano)
- Se $A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = |A| + |B|$ (princípio da adição)
- Em geral, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (princípio da inclusão-exclusão para dois conjuntos)
- Se $A \subset B$ então $|B \setminus A| = |B| - |A|$ (“tudo menos o que não interessa”)
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (princípio da multiplicação)

A tabela a seguir resume as operações.

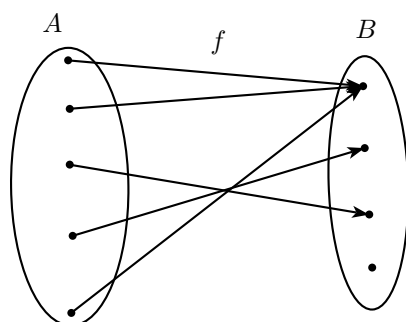
Palavra-chave	Operação de conjuntos	Operação na cardinalidade
ou	união (\cup)	+/-
e	interseção (\cap)	+/-
menos	subtração (\setminus)	-
e	produto cartesiano (\times)	.

2 Funções em Combinatória ou Como Conferir sua Contagem

Uma *função* é uma tripla ordenada (A, B, f) , em que $f \subset A \times B$ é tal que para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Em termos formais, as seguintes duas condições devem ser satisfeitas:

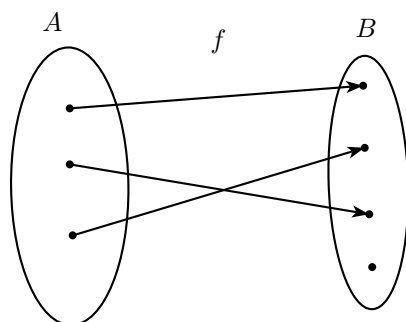
- $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.
- $\forall x \in A; \exists y \in B : (x, y) \in f$.

Denotamos $f: A \rightarrow B$ com $(x, y) \in f \iff f(x) = y$ ou, como faremos mais em Combinatória, $x \xrightarrow{f} y$.



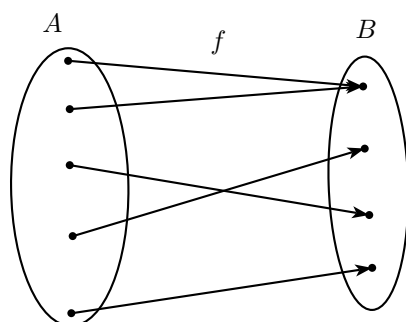
Qual é a importância de funções em Combinatória? As funções fazem associações entre dois conjuntos A e B diferentes, e portanto *transformam um problema de contagem em A em um problema de contagem em B* . Existem três tipos de função que são muito importantes.

Uma função é *injetora* se todo elemento de A está associado a um elemento diferente de B , ou seja, $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Outra maneira de dizer isso é que se $x_1 \xrightarrow{f} y$ e $x_2 \xrightarrow{f} y$ então $x_1 = x_2$. Note que isso é o mesmo que o inverso da condição (i) da definição de função.



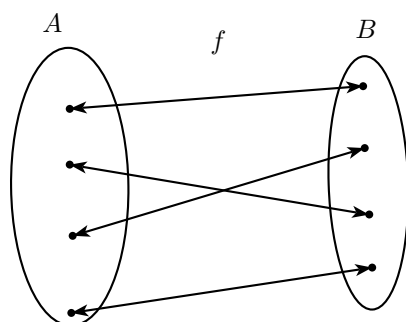
Note que se A e B são conjuntos finitos e existe uma função injetora de A em B então podemos afirmar de $|A| \leq |B|$, pois a cada elemento de A corresponde um elemento diferente de B , e quem sabe sobram elementos em B .

Uma função é *sobrejetora* se todo elemento de B tem um associado em A , ou seja, $\forall y \in B; \exists x \in A : x \xrightarrow{f} y$. Note que isso é o mesmo que o inverso da condição (ii) da definição de função.



Note que se A e B são conjuntos finitos e existe uma função sobrejetora de A em B então podemos afirmar de $|A| \geq |B|$, pois a cada elemento de B corresponde pelo menos um elemento de A , e pela definição de função um elemento de A não pode estar associado a dois ou mais elementos de B .

Enfim, uma função é *bijetora* quando é injetora e sobrejetora. Chamamos uma função bijetora também de *bijeção*. Isso quer dizer que os inversos das condições (i) e (ii) da definição devem ser satisfeitas. Note que isso mostra que a *relação inversa* f^{-1} da função $f: A \rightarrow B$, definida por $f^{-1} \in B \times A$, $(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$ é uma função.



Para denotar que $f(x) = y$ em uma bijeção f , muitas vezes indicamos $x \xrightarrow{f} y$. Quando o contexto deixa clara a bijeção, simplesmente escrevemos $x \leftrightarrow y$.

Mas, mais importante ainda, se A e B são finitos e existe uma bijeção de A em B então $|A| = |B|$. Isso nos leva ao seguinte princípio:

$$\boxed{|A| = |B| \text{ quando existe uma função inversível de } A \text{ em } B.}$$

Por incrível que pareça, você já faz bijeções desde criança. No momento em que você aponta para objetos e pensa “um, dois...”, você está fazendo uma bijeção entre o conjunto A dos objetos que você está contando e o conjunto $\{1, 2, \dots, |A|\}$.

Exemplo 1. (IME) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N , devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira?

Solução. O segredo é não se preocupar com onde o carro 1 vai estacionar e colocar os outros. Cada carro, depois do primeiro, estaciona na frente ou atrás da fila. Assim, estabelecemos uma bijeção entre as configurações e o conjunto $\{\text{frente, atrás}\}^{N-1}$. Por exemplo, fazemos a correspondência

$$\begin{array}{c} (\text{atrás, frente, frente, frente, atrás, atrás, atrás, frente, atrás}) \\ \updownarrow \\ (10, 8, 7, 6, 2, 1, 3, 4, 5, 9) \end{array}$$

Note que essa correspondência é claramente inversível: basta observar a posição do 2 em relação ao 1, depois observar a posição do 3 em relação ao grupo formado por 1 e 2, e assim por diante, observando a posição entre o i e o grupo formado por $1, 2, \dots, i-1$.

Logo o total pedido é $|\{\text{frente, atrás}\}^{N-1}| = 2^{N-1}$. \square

Então, para conferir uma contagem, basta:

- Definir com clareza a associação que você fizer entre conjuntos.
- Encontrar a inversa dessa associação e mostrar que é uma função.

3 Alguns Paradigmas de Contagem

3.1 Permutações

Permutar n objetos é o mesmo que *ordená-los*. Também dizemos que uma *permutação* de um conjunto A de n elementos é uma n -upla ordenada (a_1, \dots, a_n) em que cada elemento de A aparece uma única vez. Podemos definir também permutação como uma bijeção de A em A .

De quantas maneiras podemos ordenar n objetos? Ou, em outras palavras, quantas são as suas permutações?

Lema 1. Há $n!$ maneiras de se permutar n objetos.

Demonstração. Basta fazer uma bijeção entre as permutações e o conjunto

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n-1\} \times \{1, 2, \dots, n-2\} \times \dots \times \{1, 2\} \times \{1\}.$$

Note que A é um conjunto de n -uplas ordenadas. Primeiro, numere os objetos de 1 a n . A primeira coordenada do elemento de A é o primeiro objeto; para cada nova coordenada, elimine os objetos já na fila e renumere-os na ordem crescente, e coloque na coordenada o novo número. Essa correspondência é uma bijeção, e com isso a quantidade de permutações é $|A| = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Observe a bijeção para $n = 3$:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\leftrightarrow (1, 1, 1) \\ (1, 3, 2) &\leftrightarrow (1, 2, 1) \\ (2, 1, 3) &\leftrightarrow (2, 1, 1) \\ (2, 3, 1) &\leftrightarrow (2, 2, 1) \\ (3, 1, 2) &\leftrightarrow (3, 1, 1) \\ (3, 2, 1) &\leftrightarrow (3, 2, 1) \end{aligned}$$

□

3.2 Permutações Circulares

Permutação circular é uma permutação de objetos colocados em círculo, de modo que ao girarmos o círculo obtemos a mesma permutação circular. Por exemplo, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ e $(3, 1, 2)$ representam a mesma permutação circular.

Lema 2. Há $(n-1)!$ permutações circulares de n objetos.

Demonstração. Basta mostrar que cada permutação circular corresponde a n permutações. Mas para isso, basta escolher um dos elementos da permutação para ser o primeiro elemento da permutação. Ou seja, fazemos a bijeção

$$(\text{permutação circular, início}) \leftrightarrow \text{permutação}$$

Com isso, sendo k a quantidade de permutações circulares, $k \cdot n = n! \iff k = (n-1)!$. □

3.3 Permutações com Repetições ou Anagramas

Quando temos objetos repetidos, o número de permutações muda. Uma maneira simples de ver permutações com objetos repetidos é associar a cada tipo de objeto um símbolo, e contar o número de permutações desses símbolos. Essas permutações são chamadas *anagramas*, e também são vistas como anagramas de palavras. Por exemplo, ROMA é anagrama de AMOR, CABANA é anagrama de BACANA, ANAGRAMA é anagrama de AMAGRANA e IRACEMA é anagrama de AMERICA (para quem gosta de Literatura: há críticos literários que acreditam que esse último anagrama é intencional).

Lema 3. O número de anagramas com a_i símbolos do tipo i , $1 \leq i \leq n$, é $\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)!}{a_1!a_2!\dots a_n!}$.

Demonstração. Antes de fazer a demonstração em si, vamos ver um exemplo: calculemos a quantidade de anagramas da palavra BANANA. Para tanto, vamos colocar índices nas letras repetidas: B_1, A_1, A_2, A_3, N_1 e N_2 . Há $6!$ permutações de letras **com índice**. Mas note que, por exemplo, o anagrama NABAAN pode ser representado por $N_2A_3B_1A_1A_2N_1$ ou $N_1A_1B_1A_3A_2N_2$, ou seja, podemos permutar os índices dentro de cada letra como quiser. Assim, podemos montar uma permutação com índice através de um anagrama e permutações de cada índice. Em outras palavras, fazemos a bijeção

$$\text{permutação} \leftrightarrow (\text{anagrama, ordem dos Bs, ordem dos As, ordem dos Ns})$$

Em particular,

$$N_2A_3B_1A_1A_2N_1 \leftrightarrow (\text{NABAAN}, (1), (3, 1, 2), (2, 1))$$

Note que a função está bem definida, e a sua inversa também é uma função: basta tomar o anagrama e numerar os Bs, os As e os Ns na ordem da permutação.

Logo, sendo m a quantidade de anagramas de BANANA,

$$6! = m \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2! \iff m = \frac{6!}{1!3!2!}.$$

Essa ideia é facilmente generalizada: sendo A_1, A_2, \dots, A_n os símbolos, fazemos a bijeção

$$\text{permutação} \leftrightarrow (\text{anagrama}, \text{ordem dos } A_1\text{s}, \text{ordem dos } A_2\text{s}, \dots, \text{ordem dos } A_n\text{s})$$

e o resultado segue. □

3.4 Combinações

Esse é um dos paradigmas de contagem mais úteis: ele conta o número de maneiras de escolher k entre n objetos ou, mais formalmente, o número de subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

Lema 4. Um conjunto de n elementos tem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ subconjuntos de k elementos.

Demonstração. Vamos transformar cada subconjunto de k elementos em um código. Primeiro, numere os elementos de 1 a n . Em seguida, associe a cada elemento a letra S se ele pertence ao subconjunto e a letra N se não pertence. Por exemplo, se o conjunto é $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o subconjunto é $\{1, 2, 4\}$, utilizamos (S, S, N, S, N) . Isso é claramente uma bijeção: podemos obter o código a partir do subconjunto, e a partir do código se recupera imediatamente o subconjunto.

Assim, o número de subconjuntos de k entre n elementos é igual ao número de códigos com k letras S e $n - k$ letras N , ou seja, é o número de anagramas com k S 's e $n - k$ N 's, que é

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

3.5 Número de Soluções de Equação Linear

É possível contar, com uma bijeção, o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

Lema 5. O número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

com $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \geq 0$ é $\binom{n+k-1}{n}$.

Demonstração. Considere que temos n objetos idênticos para serem distribuídos entre k cestas numeradas entre 1 e k . Sendo x_i o número de objetos na cesta i , temos x_i inteiro não negativo e $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Ou seja, o número de soluções da equação dada é igual ao número de maneiras de distribuir os objetos nas cestas. Para isso, representamos os objetos por \circ e as divisórias entre cestas por $|$. Por exemplo,

$$\circ \circ | \circ || \circ \leftrightarrow (2, 1, 0, 1),$$

ou seja, 2 objetos na cesta 1, 1 na cesta 2, nenhum na cesta 3 e 1 na cesta 4.

Temos n objetos \circ e $k - 1$ divisórias $|$, então o número de soluções é igual ao número de anagramas com n os e $k - 1$ |s, que é $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}$. □

Exemplo 2. Há n carros, numerados de 1 a n , e uma fileira com n lugares para estacionar, numerados de 1 a n . Cada carro i tem seu lugar favorito a_i ; quando vai estacionar, se dirige ao seu lugar favorito; se ele está livre estaciona ali, caso contrário, avança para o primeiro lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas seqüências (a_1, a_2, \dots, a_n) existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

Solução. Vamos listar alguns casos pequenos para entender o que está acontecendo:

Para $n = 1$, só há, é claro, uma possibilidade: (1).

Para $n = 2$, só não dá certo (2, 2). As outras três (1, 2), (2, 1) e (1, 1) dão certo.

Vejam $n = 3$. As seis permutações (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) e (3, 2, 1) obviamente dão certo. Além disso, note que algum carro deve ter 1 como vaga favorita, senão todos os carros passarão direto pela vaga 1 e algum deles não vai estacionar. As outras possibilidades são (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 2, 2), que funcionam, e (1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1) que não funcionam, além das outras $2^3 = 8$ que não contêm 1. Note que já lista todas as $3^3 = 27$ possibilidades. Com isso, o total é 16.

Trabalhem agora com $n = 4$. São $4^4 = 256$ possibilidades, então não vale a pena listar todos, ou seja, precisamos de alguma estratégia de contagem. Contemos por quantidade de uns. Já temos $3^4 = 81$ possibilidades que não funcionam (as que não tem 1). Além disso, é fácil ver que (1, 1, 1, k) funciona. Com isso, temos (1, 1, 1, 1) e (1, 1, 1, k) com $k = 2, 3, 4$ e permutações, que são mais $1 + 4 \cdot 3 = 13$ possibilidades que funcionam. Os que têm exatamente dois uns só não funcionam se são (1, 1, 4, 4) ou permutações. Mais $\frac{4!}{2!2!} = 6$ que não funcionam e $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 6 = 48$ que funcionam. Entre os $4 \cdot 3^3 = 108$ que só têm um 1, retiramos o 1 (esse carro com certeza vai conseguir estacionar) e subtraímos 1 de cada outro número, e é possível estacionar se, e somente se, a seqüência de três termos é válida. Com isso, temos $4 \cdot 16 = 64$ possibilidades que funcionam. O total é $13 + 48 + 64 = 125$.

Vejam: se x_n é a quantidade pedida, temos $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 16 = 4^2$ e $x_4 = 125 = 5^3$. Parece que $x_n = (n + 1)^{n-1}$, ou seja, a gente deve conseguir uma bijeção das seqüências com $\{1, 2, 3, \dots, n + 1\}^{n-1}$. Mas aí temos que conseguir uma associação entre seqüências com n termos e seqüências com $n - 1$ termos, o que não parece ser interessante. Talvez seja mais fácil conseguir uma bijeção entre (seqüência, k), $1 \leq k \leq n + 1$ e $\{1, 2, 3, \dots, n + 1\}^n$.

Vamos pensar em $\{1, 2, 3, \dots, n + 1\}^n$ primeiro. Considere então uma nova vaga $n + 1$, e as regras continuam as mesmas. Uma ideia que facilita a divisão por $n + 1$ é considerar permutações cíclicas, ou seja, vamos supor que as vagas estão em círculo. Desse modo, com as mesmas regras, todos os carros estacionam (por estarem em círculo, sempre aparece uma vaga livre!), e sobra uma vaga livre no final. Por simetria, há $\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n + 1)^{n-1}$ configurações com i sendo a vaga livre, $1 \leq i \leq n + 1$. Afirmamos que uma configuração corresponde a uma seqüência válida se, e somente se, a vaga livre é $n + 1$.

De fato, se a seqüência é válida, os carros nunca chegam a precisar da vaga $n + 1$, e ela nunca chega a ser usada. Reciprocamente, se a vaga livre é $n + 1$, nenhum carro listou $n + 1$ como vaga favorita no novo processo e, mais ainda, $n + 1$ nunca foi usada como vaga livre, ou seja, nenhum carro passa da vaga n , o que significaria que ele iria embora. Logo o problema está terminado (de fato, a bijeção é feita entre seqüências válidas e não válidas e $\{1, 2, 3, \dots, n + 1\}^n$, sendo que a seqüência é válida se, e somente se, a vaga que sobra é $n + 1$). \square

4 Contando/calculando de duas maneiras

Vamos praticar algo que você já fez várias vezes: calcular algo de duas maneiras. De fato, quando você resolve os probleminhas para montar equação (tipo, “o quadrado de um número é igual à sua metade”), você calcula algo de duas maneiras (“o quadrado de um número x e a sua metade” é x^2 e $x/2$, e obtemos $x^2 = x/2$). Só que agora vamos fazer isso com contagem. Ou seja, vamos contar algo de duas maneiras e igualar.

Exemplo 3. Em um comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê tem exatamente três membros. Prove que a quantidade de membros é igual à quantidade de subcomitês.

Solução. Seja n a quantidade de membros do comitês e m a quantidade de subcomitês. A quantidade de pares (membro, subcomitê) em que o membro pertence ao subcomitê é igual a $3n$ (n membros, 3 subcomitês para cada membro) e a $3m$ (m subcomitês, 3 membros para cada subcomitê). Assim o total de pares é igual a $3n$ e $3m$. Logo $3n = 3m \iff n = m$. \square

4.1 Usando tabelas para ajudar a contagem dupla

Em muitas situações, é mais fácil usar tabelas para organizar o que deve ser contado. Em muitos casos, envolvemos duas variáveis; então montar uma tabela com as duas variáveis pode ser bastante útil.

Exemplo 4. (OBM) Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale 1/2 ponto e uma derrota vale 0 ponto. Cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes do torneio é um quadrado perfeito.

Solução. Considere a seguinte tabela, em que colocamos os participantes, separados por sexo, nas linhas e nas colunas. Sendo h a quantidade de homens e m a quantidade de mulheres no torneio, marcamos as quantidades de pontos distribuídos:

	homens	mulheres
homens	$\binom{h}{2}$	x
mulheres	$hm - x$	$\binom{m}{2}$

Então temos $\binom{h}{2} = x$ e $hm - x = \binom{m}{2}$. Somando as duas equações para eliminar o x , obtemos

$$\binom{h}{2} + \binom{m}{2} = hm \iff h + m = (h - m)^2,$$

e o problema acabou. \square

Contar algo de duas maneiras também nos ajuda a demonstrar desigualdades.

4.2 Contando pares

Lema 6. Considere uma tabela $\ell \times c$ com zeros e uns, sendo C_j a soma dos números na coluna j , $j = 1, 2, \dots, c$. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambas as linhas. Então

$$t \binom{\ell}{2} = \sum_{j=1}^c \binom{C_j}{2}.$$

Demonstração. Basta contar pares de uns na mesma coluna. Seja A o conjunto de tais pares.

- **Por linhas:** Cada par de linhas tem exatamente t pares de uns na mesma coluna. Como há $\binom{\ell}{2}$ pares de linhas, $|A| = \binom{\ell}{2} \cdot t$.
- **Por colunas:** Na coluna j há C_j uns e, portanto, $\binom{C_j}{2}$ pares de uns na mesma coluna. Somando sobre as colunas, obtemos $|A| = \sum_{j=1}^c \binom{C_j}{2}$.

Aí é só igualar os dois resultados para $|A|$. \square

Normalmente, é muito difícil que a situação acima ocorra. Então a usamos para provar desigualdades.

Exemplo 5. (OBM 2002) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$ conjuntos com $|A_i| \geq \frac{n}{2}$ e $|A_i \cap A_j| \leq \frac{n}{4}$ para todos i, j com $i \neq j$. Prove que $\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \geq \frac{k}{k+1} \cdot n$.

Solução. Podemos supor sem perda de generalidade que $\bigcup_{i=1}^k A_i = \{1, 2, \dots, m\}$. Então temos que provar que $m \geq \frac{k}{k+1} \cdot n$. Considere a tabela cujas linhas são os conjuntos e as colunas são os números $1, 2, \dots, m$. Colocamos 1 na linha i e coluna j se, e somente se, $j \in A_i$. Caso contrário, colocamos zero.

	1	2	3	...	m
A_1	1	1	0	...	0
A_2	1	1	1	...	0
\vdots					
A_k	0	0	1	...	1

Note que $A_i \cap A_j$ corresponde aos uns que estão na mesma coluna nas linhas i e j . Então parece ser interessante contar as quantidades de pares de uns na mesma coluna. Seja C_j o número de uns na coluna j , então. Adaptando a proposição acima,

$$\sum_{j=1}^m \binom{C_j}{2} \leq \frac{n}{4} \cdot \binom{k}{2}$$

Como usamos a informação de que $|A_i| \geq \frac{n}{2}$? Podemos simplesmente somar todos os uns. Sendo S a soma, $S \geq k \cdot \frac{n}{2}$. Logo a inequação acima se reduz a

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m C_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m C_j \leq \frac{nk(k-1)}{8} \iff \sum_{j=1}^m C_j^2 - S \leq \frac{nk(k-1)}{4}$$

Apareceu a soma dos quadrados, mas só temos a soma! O que fazer? Uma ideia é usar a desigualdade de Cauchy-Schwartz: $\sum_{j=1}^m C_j^2 \cdot \sum_{j=1}^m 1^2 \geq \left(\sum_{j=1}^m C_j\right)^2 \iff \sum_{j=1}^m C_j^2 \geq \frac{S^2}{m}$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{m} - S \leq \sum_{j=1}^m C_j^2 - S \leq \frac{nk(k-1)}{4} &\implies \frac{S^2}{m} - S \leq \frac{nk(k-1)}{4} \\ &\iff \left(S - \frac{m}{2}\right)^2 \leq \frac{mnk(k-1)}{4} + \frac{m^2}{4} \end{aligned}$$

Sendo $S \geq k \cdot \frac{n}{2} \geq 1 \cdot \frac{m}{2}$, temos

$$\left(k \frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right)^2 \leq \frac{mnk(k-1)}{4} + \frac{m^2}{4} \iff m \geq \frac{k}{k+1}n,$$

como queríamos demonstrar. □

5 Recursões

Às vezes não vale a pena contar diretamente. Se algo depende de um n , pode ser mais vantajoso chamar a quantidade de a_n e depois escrever a_n em termos dos valores anteriores.

Geralmente, fazemos o seguinte com recursões:

- Estudamos alguns casos pequenos;
- Obtemos uma equação de recorrência. Para isso, consideramos o caso n e o reduzimos aos casos anteriores.
- Resolvemos a equação de recorrência (nem sempre isso é fácil).

O nosso primeiro exemplo *pode* ser resolvido com o princípio multiplicativo, mas é a maneira mais fácil de começar.

Exemplo 6. Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a , b ou c ?

Solução. Sabemos que, do princípio multiplicativo, a resposta é 3^n . Mas vamos resolver esse problema sob a ótica das recursões: seja x_k a quantidade de seqüências com k letras nas condições do enunciado. Como podemos obter uma seqüência com n letras? Simples: colocamos uma nova letra depois de uma seqüência com $n - 1$ letras! Assim, como há três possibilidades para a última letra e x_{n-1} para a seqüência de $n - 1$ letras, $x_n = 3 \cdot x_{n-1}$. Além disso, como só há uma seqüência vazia, $x_0 = 1$. Assim, chegamos à recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 3x_{n-1} \end{cases}$$

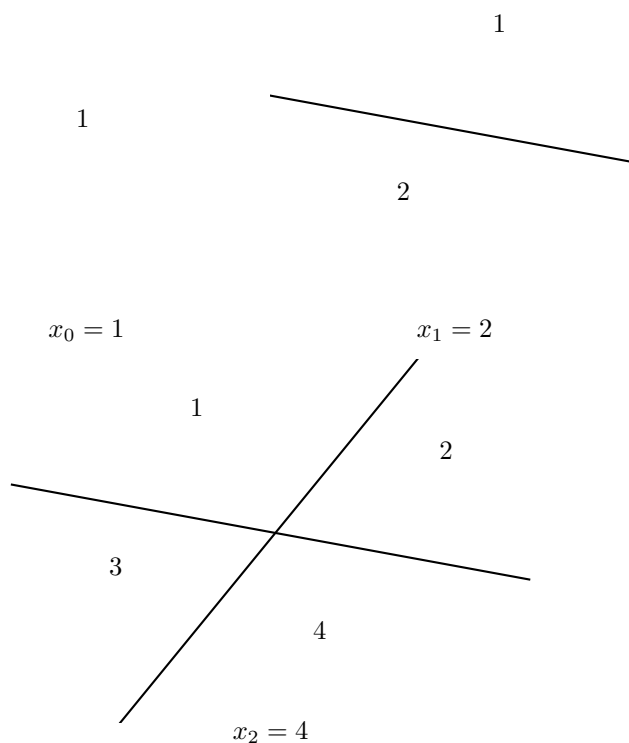
Como resolver essa recursão? Observe que $\frac{x_k}{x_{k-1}} = 3$ para todo k , de modo que

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} \cdot x_0 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n \text{ vezes}} \cdot 1 = 3^n$$

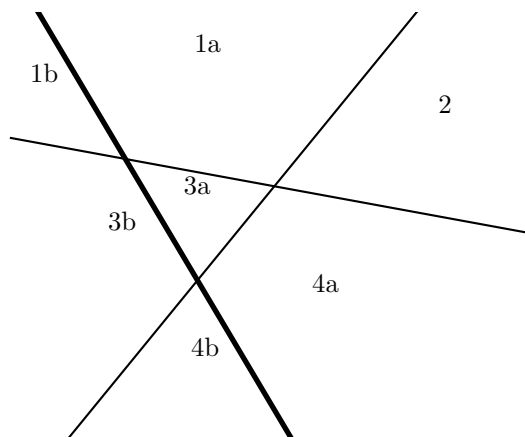
□

Exemplo 7. Em no máximo quantas regiões n retas cortam o plano?

Solução. Antes, vejamos alguns casos pequenos. Sendo x_n o número máximo de regiões determinadas por n retas:



Parece que $x_n = 2^n$, não? Não tão rápido: para $n = 3$ temos uma surpresa: adicionando uma terceira reta, vemos que ela não pode cortar todas as regiões anteriores:



O que aconteceu? A reta cortou 3 regiões em vez de 4 e obtivemos $x_3 = 7$. Pensando um pouco, vemos que isso é o melhor que podemos fazer mesmo: a nova reta vai ser cortada no máximo uma vez por cada uma das outras duas retas. Cada corte é uma “mudança de região”, de modo que essas duas mudanças implicam três novas regiões. Assim, $x_3 = x_2 + 3$.

Pensando ainda mais um pouco, não é difícil generalizar: ao colocarmos a n -ésima reta, ela vai ser cortada no máximo $n - 1$ vezes, gerando $n - 1$ “mudanças de região” e, portanto, n novas regiões, de modo que $x_n = x_{n-1} + n$. Observando o caso pequeno $x_0 = 1$, temos a recursão

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + n \end{cases}$$

Agora falta resolver a recursão. Mas aí é só “telescopar”:

$$\begin{array}{r} x_n - x_{n-1} = n \\ x_{n-1} - x_{n-2} = n - 1 \\ x_{n-2} - x_{n-3} = n - 2 \\ \vdots \\ x_2 - x_1 = 2 \\ x_1 - x_0 = 1 \\ \hline x_n - x_0 = 1 + 2 + \dots + n \end{array}$$

Assim, basta calcular a soma $1 + 2 + \dots + n$, que é conhecida e igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, ou seja,

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Exemplo 8. (OBM 2010, segunda fase) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Solução. Em um dia, ele tem duas opções: jogar ou não; em dois dias, ele só não pode jogar nos dois dias, tendo $2^2 - 1 = 3$ possibilidades. Seja a_n o número de maneiras de jogar no período de n dias. Deste modo, queremos a_{10} e sabemos que $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

Considere um período de n dias. Se ele joga no dia n , não joga no dia $n - 1$, e há a_{n-2} maneiras de escolher entre os outros $n - 2$ dias; se ele não joga no dia n , ele pode escolher livremente os dias entre os $n - 1$ anteriores, e há a_{n-1} possibilidades.

Temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$. Substituindo até $n = 10$, obtemos a seguinte tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

A resposta é então $a_{10} = 144$. □

Observação: Talvez você tenha reconhecido os números: sim, é a *sequência de Fibonacci* (no caso, deslocada), que é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Há uma fórmula para ela:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Exemplo 9. (Romênia 2003 TST) Em um torneio de matemática há $2n$ participantes. Cada um deles manda um problema para o júri, que depois dá para cada participante um dos $2n$ problemas. O torneio é dito *justo* quando existem n participantes que receberam os problemas dos outros n participantes.

Prove que a quantidade de distribuições de problemas em torneios justos é um quadrado perfeito.

Solução. Seja a_n a quantidade de distribuições de problemas em torneios justos com $2n$ participantes. Temos $a_1 = 1$ (as duas pessoas trocam de problemas entre si).

Calculemos a_2 : a pessoa 1 tem 3 escolhas para quem vai receber seu problema; chame essa pessoa de 2. Ela ainda pode mandar problema para qualquer um dos outros (3 escolhas).

- Se ela mandar para 1, não há escolhas para os outros dois a não ser trocarem problemas;
- Se não, suponha que mandou para a pessoa 3. Então os dois conjuntos de participantes são 1 e 3 e, por exclusão, 2 e 4. Para quem a pessoa 3 manda o seu problema? A pessoa 2 já recebeu seu problema, e a pessoa 1 está no mesmo conjunto, então só pode ser a pessoa 4. A pessoa 4 só pode mandar seu problema para 1, já que os outros já têm seus problemas.

Ou seja, em qualquer caso, só há uma escolha. Com isso, $a_2 = 3 \cdot 3 = 9$.

Mais um caso pequeno: vejamos como calcular a_3 . Tentemos a mesma ideia: a pessoa 1 tem 5 escolhas; chame de 2 a pessoa que recebeu o problema de 1. A pessoa 2 tem 5 escolhas de novo. Novamente dividimos em casos:

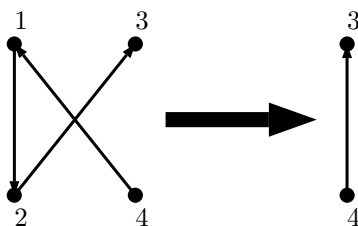
- Se 2 manda um problema de volta para 1, basta distribuir os quatro problemas entre as pessoas que sobraram. Há $a_2 = 9$ possibilidades para fazer isso. (Opa! Olha uma recursão aparecendo!)
- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, temos parte de um conjunto: $\{1, 3, x\}$. A pessoa 3 não pode mandar problemas para 1 ou 2, então manda para outra das 3 pessoas, digamos a pessoa 4. Com isso, temos o outro conjunto $\{2, 4, y\}$. Essa pessoa tem 3 escolhas: 1 ou as outras duas pessoas (note que 3 já recebeu o seu problema). Se for 1, sobram as outras duas e essas pessoas trocam problemas entre si. Se não for 1 e for, digamos 5, os conjuntos são $\{1, 3, 5\}$ e $\{2, 4, 6\}$ e 5 só pode mandar problema para 6, e 6 para 1. Novamente, temos $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades.

Logo $a_3 = 5^2 \cdot 9 = 225 = 15^2 = (1 \cdot 3 \cdot 5)^2$.

Parece que $a_n = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1))^2 = ((2n - 1)!!)^2$ (sim, a notação para o “imparial” $(2n - 1)!!$ existe; além disso, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot n!$). Vamos provar isso.

Note então que, se estivermos certos, $a_n = (2n - 1)^2 \cdot a_{n-1}$. Ou seja, fazemos o primeiro passo, escolhendo a pessoa 2 que recebe problema de 1 e em seguida a pessoa que recebe o problema de 2. No caso em que 2 manda problema para 1, a recursão fica clara. Mas e o segundo caso? Voltando ao caso $n = 3$ e pensando um pouco mais, o segundo caso pode ser simplificado:

- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, faça o seguinte: já temos que 1 e 2 estão em conjuntos diferentes e que 1 e 3 estão no mesmo conjunto. Chame de 4 a pessoa que manda problema para 1. Essa pessoa 4 está no mesmo conjunto que 2. Agora, exclua 1 e 2 da lista de participantes e considere o torneio com duas pessoas (1 e 2) a menos e as pessoas mandam problemas para os mesmos participantes, exceto 4, que manda problema para 3. Em outras palavras, fazemos isso:



Como sabemos que 3 e 4 estão em conjuntos diferentes, esse torneio também precisa ser justo. Com isso, há a_2 possibilidades nesse caso.

Esse argumento anterior pode ser usado no caso geral também (já que não mencionamos números maiores do que 4). Logo

$$a_n = (2n - 1)^2 \cdot a_{n-1}$$

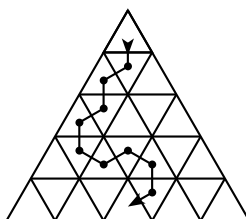
e podemos “telescopar” para terminar o problema: sendo $\frac{a_n}{a_{n-1}} = (2n - 1)^2$,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = (2n - 1)^2 (2n - 3)^2 \cdots 3^2 \implies a_n = (2n - 1)^2 (2n - 3)^2 \cdots 3^2 a_1 = ((2n - 1)!!)^2,$$

que é um quadrado perfeito. □

6 Problemas

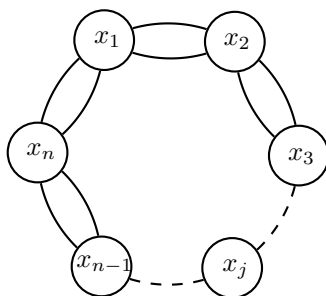
- (Canadá 2005) Um triângulo equilátero de lado n é dividido em triângulos equiláteros unitários. Seja $f(n)$ o número de caminhos começando no triângulo da linha de cima e terminando no triângulo do meio na linha de baixo, tais que triângulos vizinhos no caminho têm um lado em comum e o caminho nunca vai para cima (de uma linha mais baixa para outra mais alta) nem passa por um triângulo duas vezes. A figura mostra um exemplo para $n = 5$. Calcule $f(2005)$.



- (Baltic Way 2014)¹ De quantas maneiras podemos pintar 16 lugares em fila, cada um de vermelho ou verde, de modo que a quantidade de assentos consecutivos pintados da mesma cor é sempre ímpar?
- (IMO 1994) Para qualquer inteiro positivo k , seja $f(k)$ o número de elementos do conjunto $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$ cuja representação na base 2 tem exatamente 3 1's.
 - Prove que, para qualquer inteiro positivo m , existe pelo menos um inteiro positivo k tal que $f(k) = m$.
 - Determine todos os inteiros positivos m para os quais existe exatamente um k com $f(k) = m$.

¹A Baltic Way é uma competição por equipes realizada para países bálticos (Letônia, Estônia, Lituânia) e convidados. Ela é feita em comemoração ao *Caminho Báltico*, que ocorreu em 3 de agosto de 1989, quando cerca de dois milhões de habitantes dos três países formaram uma fila de 675 km de pessoas de mãos dadas, reivindicando a independência desses países da União Soviética.

4. (APMO 2014) Seja $S = \{1, 2, \dots, 2014\}$. Para cada subconjunto não vazio $T \subseteq S$, um de seus elementos é escolhido como seu *representante*. Encontre o número de maneiras de designar representantes para todos os subconjuntos não vazios de S de modo que se um subconjunto $D \subseteq S$ é uma união disjunta dos subconjuntos não vazios $A, B, C \subseteq S$, então o representante de D é também o representante de pelo menos um dos subconjuntos A, B, C .
5. (IMO 2011) Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.
- Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.
6. (OBM 2006) Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.
7. (Cone Sul 2004) Seja n um inteiro positivo. Chamamos C_n a quantidade de inteiros positivos x , menores que 10^n , tais que a soma dos dígitos de $2x$ é menor que a soma dos dígitos de x .
- Demonstre que $C_n \geq \frac{4}{9}(10^n - 1)$.
8. (Ibero 2009) Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, considere um conjunto de n ilhas em círculo. Entre duas ilhas vizinhas há duas pontes, como mostra a figura.



Começando da ilha x_1 , de quantas maneiras é possível atravessar todas as $2n$ pontes sem usar uma mesma ponte mais de uma vez?

9. (Cone Sul 1997) Seja n um número natural, $n > 3$.
- Demonstrar que entre os múltiplos de 9 menores que 10^n há mais números com a soma de seus dígitos igual a $9(n - 2)$ que números com a soma de seus dígitos igual a $9(n - 1)$.
10. (Balkan 2014)² Seja n um inteiro positivo. Um hexágono regular com lado de tamanho n é dividido em triângulos equiláteros de lado 1 por retas paralelas a seus lados. Encontre a quantidade de hexágonos regulares cujos vértices são vértices dos triângulos equiláteros.
11. (Baltic Way 2014) Seja p_1, p_2, \dots, p_{30} uma permutação dos números $1, 2, \dots, 30$. Para quantas dessas permutações vale a igualdade

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = |p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \dots + |p_{30} - 30| = 450?$$

²Essa olimpíada é para países da península balcânica, que compreende a antiga Iugoslávia, Albânia, Grécia, Turquia, Bulgária, Romênia e Chipre.

12. (OBM 2012) De quantas maneiras podemos pintar as casas de um tabuleiro $n \times n$ com 4 cores de modo que casas com um lado em comum não tenham a mesma cor e em cada quadrado 2×2 formado por quatro casas em linhas e colunas consecutivas apareçam as quatro cores?
13. (Ibero 2005) Seja n um inteiro positivo fixado. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_{2n} estão sobre uma reta, nessa ordem. Pinte cada ponto de azul ou vermelho de acordo com o seguinte procedimento: desenhe n circunferências disjuntas duas a duas, cada uma com diâmetro $A_i A_j$, para alguns $i \neq j$ e tais que todo ponto A_k pertença a exatamente uma circunferência. Pontos na mesma circunferência devem ter a mesma cor.

De quantas maneiras podemos colorir os $2n$ pontos?

14. (IMO 2002) Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \leq x$ e $y' \leq y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abcissas todas diferentes, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas diferentes. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y .
15. (IMO 2008) Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos seqüências de operações.

Seja N o número de seqüências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de seqüências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\frac{N}{M}$.

16. (Cone Sul 2004) Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções \leftarrow e \uparrow .

Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p .

Em quantos caminhos a área é um múltiplo de p ?

17. (Cone Sul 1998) O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

- (i) cada linha passe exatamente por três paradas;
- (ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;
- (iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

18. (OBM 2011) Um álbum, para ser completo, deve ter 2011 figurinhas. Determinar o menor valor de m que tem a seguinte propriedade: para qualquer distribuição de figurinhas entre 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, sempre existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem.

19. (IMO 1998) Numa competição, existem a concorrentes e b juizes, onde $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como “aprovado” ou “reprovado”. Suponha que k é um número tal que as classificações dadas por dois juizes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

20. (Cone Sul 2013) Semiciclolândia é um país com 500 cidades e 2013 estradas de mão dupla, cada uma conectando diretamente duas cidades. Duas cidades A e B são chamadas de *vizinhas* se existe uma estrada que as conecta e duas cidades A e B são chamadas de *quase-vizinhas* se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B .

Sabemos que em Semiciclolândia não existem duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada e não existem quatro cidades A, B, C e D tais que simultaneamente A é vizinha de B , B é vizinha de C , C é vizinha de D e D é vizinha de A .

Demonstrar que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 57 cidades.