SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA

Professor Marcio Cohen <marciocohen@gmail.com>
Colégio Ponto de Ensino

1. DEFINIÇÃO

É uma seqüência na qual cada termo é definido em função de seu(s) antecessor(es). Por sua vez, uma seqüência (a_n) de números reais deve ser entendida como uma n-upla ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$) que a cada número natural k associa o termo a_k. Também podemos ver uma seqüência (a_n) como uma função $f : \mathrm{N} \to \Re$ que a cada número natural k faz corresponder o termo $a_k = f(k)$.

EXEMPLO 1.

A seqüência dos números naturais ímpares, (1,3,5,7,9,...) é uma seqüência de recorrência. Denotando por a_k o k-ésimo termo da seqüência, note que $a_{k+1} = a_k + 2$, com $a_1 = 1$.
Diz-se que essa é uma forma implícita de determinar a seqüência dos números ímpares. Uma forma explícita é uma que não relaciona os termos entre si. Por exemplo, $a_k = 2k - 1$.

EXEMPLO 2.

Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = q.x_n$, $x_1 = a$.

EXEMPLO 3.

A seqüência de (F_n), denominada de Fibonacci, cujos termos são (1,1,2,3,5,8,...) onde cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $F_0=F_1=1$.

Uma equação de recorrência, por si só, não admite uma única seqüência como solução. Por exemplo, a seqüência (2,4,6,8,...) também satisfaz a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2$ do exemplo 1, embora seja diferente da seqüência (1,3,5,7,...). É por isso que foi necessário determinar algum elemento da seqüência (por exemplo, x_1=1) no exemplo.

2. MOTIVAÇÃO

Uma das aplicações mais interessantes da teoria de seqüências de recorrência é na solução de problemas de contagem. Vários problemas que são comumente encarados como de "análise combinatória" podem ser resolvidos mais facilmente com a ajuda de recorrências.

PROBLEMA 1.

Quantas são as seqüências de 4 termos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois zeros consecutivos? Você consegue generalizar o problema para seqüências de n termos pertencentes a $\{0,1,2\}$?

PROBLEMA 2.

Ao subir a escada de seu prédio, José às vezes sobre dois degraus de uma vez e às vezes sobe um de cada vez. Sabendo que a escada tem 8 degraus, de quantas maneiras diferentes José pode subir a escada? Você consegue generalizar para o caso de uma escada com n degraus?

PROBLEMA 3.

Qual o número máximo de regiões em que 10 retas podem dividir um plano? Generalize para n retas.

3. RECORRÊNCIA DE 1ª ORDEM

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Vamos primeiro resolver o caso a = 1 (denominado PROGRESSÃO ARITMÉTICA)!

Agora vamos adaptar essa idéia para o caso geral!!

PROBLEMA 4: Resolver a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 5;\ x_1 = 4$.

PROBLEMA 5: Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero.

4. RECORRÊNCIAS DE 2ª ORDEM

4.1 CONCEITO

É uma recorrência linear homogênea que expressa x_{n+2} em função de seus antecessores x_{n+1} e x_n.. Aqui estudar-se-á recorrências desse tipo com coeficientes constantes (p. ex., $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$).

Exemplos: $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

4.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$

A solução é obviamente única. Para resolve-la, associa-se a recorrência a equação $r^2 + pr + q = 0$, denominada equação característica.

Deve-se considerar dois casos em separado quanto às raízes dessa equação:

1º Caso: $r_1 \neq r_2$:

Nesse caso, todas as soluções possíveis são da forma $x_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n\ \forall n$, onde k_1 e k_2 são constantes que vão depender dos valores iniciais da seqüência.

Demo:

2º Caso: $r_1 = r_2 = r$:

Nesse caso, a solução geral é $x_n = k_1 r^n + k_2 n r^n$.

Demo:

EXERCÍCIOS

1. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

2. Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir um plano.

3. A torcida do Fluminense tem hoje p_0 membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de ser Fluminense. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada a extinção?

4. Resolva as recorrências abaixo :
   (a) $x_{n+1} - 3x_n = 4,\ x_0 = 1$
   (b) $x_{n+1} + x_n = 4n,\ x_0 = 2$

5. Um círculo foi dividido em n ($n > 1$) setores. De quantos modos podemos colori-los, cada setor como uma só cor, se dispomos de k ($k > 2$) cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

6. Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.

7. Durante a guerra de judeus e romanos, Josephus estava entre 11 rebeldes judeus encurralados em uma caverna pelos romanos. Preferindo o suícidio a captura, os rebeldes decidiram formar um círculo e, contando ao longo deste, suicida-se uma pessoa sim, uma não, até não sobrar ninguém. Determine qual posição Josephus deveria escolher para sair ileso desse círculo malígno.

8. Resolva a recorrências abaixo:
$$x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

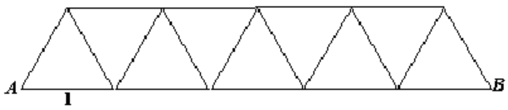
9. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

10. Determine o número de maneiras diferentes de se cobrir um tabuleiro 2x2 com dominós 2x1 iguais.

11*. Prove que $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \dfrac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$ é inteiro para todo natural n.

12*. Prove que a parte inteira de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ é sempre par.

13. Caminhando pelos segmentos unitários da figura abaixo, determine quantas são as maneiras de ir de A até B sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.



14. (Banco IMO 87) Quantas são as seqüências de comprimento n que podem ser formadas com os números $\{0,1,2,3,4\}$ com dígitos vizinhos diferindo de 1 (em módulo)?

15. Quatro cidades A, B, C, D são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:
   a) Exatamente 50 km?
   b) 10.n km?