# Sistemas de Numeração

Prof. Cícero Thiago B. Magalhães

## 1 **História**

O nosso sistema de numeração nasceu na Índia, por volta do século V. Usando grupos de 10, desenvolveram um sistema de numeração que estabelecia a idéia de posição. Este sistema de numeração é uma variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios 1700 anos antes de Cristo. Existem outros sitemas de numeração em uso. Os nossos computadores são programados para o usar os sistemas binários ou em bases potências de 2.

## 2 **Sistemas de numeração**

No nosso sitema de numeração, que é o decimal, qualquer número pode ser representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

acrescidos do 0 (zero). Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal.

Podemos expandir um número qualquer $a$, em uma base arbitrária $b$. Vamos mostrar um pequeno algoritmo, que trata de aplicar sucessivas vezes a divisão euclidiana, como segue:

$$a = bq_0 + r_0,\ r_0 < b,$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, r_1 < b,$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \ldots$, ddeveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e assim o processo é interrompido pois $q_n = 0$. Assim,

$$a = r_0 + r_1 b + \ldots + r_n b^n.$$

O mais impressionante é que existe apenas uma maneira de representar o número $a$ numa base arbitrária $b$. Pode acreditar, isto é um Teorema.

**Exemplo** 2.1.
Vamos representar o número 723 na base 5.

Por divisão euclidiana sucessiva,

$$723 = 144 \cdot 5 + 3,\ 144 = 28 \cdot 5 + 4,\ 28 = 5 \cdot 5 + 3,\ 5 = 1 \cdot 5 + 0, 1 = 0 \cdot 5 + 1.$$

Portanto,

$$723 = 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4,$$

e consequentemente, 723 na base 5 se representa por 10343.

**Exercícios**

1. Mostrar que a diferença entre os inteiros $abc$ e $cba$ $(a > c)$ é um múltiplo de 11.
**Solução**
Observe que $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ e $\overline{cba} = 100c + 10b + a$ e que $\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 11(9a - 9c)$. O que fica claro que a diferença é um múltiplo de 11.

2. Mostrar que a soma dos seis inteiros de dois algarismos que se podem formar com três algarismos diferentes é igual a 22 vezes a soma dos algarismos.

3. Considere os números naturais de três algarismos. Em quantos deles, ao somarmos dois de seus algarismos obtemos o dobro do algarismo restante? Justifique sua resposta. (Olimpíada de Maio)

4. Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de quatro cifras. O resultado é

193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu. (Olimpíada de Maio)

5. Três números de três algarismos são dados tais que eles possuem em sua representação decimal todos os algarismos de 1 à 9, exceto o zero. A soma dos três números é 1665. O primeiro algarismo de cada número é permutado com o último algarismo do mesmo número, formando três novos números de três algarismos. Qual a soma dos três novos números? (Olimpíada Rioplatense)

6. Sejam $x$ e $y$ dois números de dois algarismos cada. Sabe - se que $x = 2y$, e que um dos algarismos de $y$ é a soma e o outro a diferença dos algarismos de $x$. Achar todos os possíveis valores de $x$ e $y$.

7. Ache um número de 6 algarismos $abcdef$ tal que multiplicando esse número por 6 encontraremos como resultado o número $defabc$.
**Solução**
Escrevemos o número desejado na forma $N = 1000A + B$, em que $A$ e $B$ são número de três algarismos, teremos a seguinte equação $1000B + A = 6(1000A + B) \Rightarrow 5999A = 994B$. Dividindo por 7 temos, $857A = 142B$ e como $(857,\ 142) = 1$. Concluímos que $A = 142$ e $B = 857$.

8. Determine todos os inteiros positivos de dois algarismos tais que a diferença entre o número e o produto de seus algarismos seja 12.

9. Ache todos os números naturais $x$ tais que o produto de seus dígitos (na notação decimal) é igual a $x^2 - 10x - 22$. (IMO)

10. Existe algum sistema de numeração em que as seguintes igualdades $3 + 4 = 10$ e $3 \cdot 4 = 15$ são simultaneamente satisfeitas?

11.

## 3 Divisibilidade e conquista

Desde muito cedo, quando aprendemos a tabuada, nos questionamos, se existem critérios especiais de divisibilidade. Estes critérios existem e são muito simples. Apresentaremos apenas o enunciado dos critérios, ficando a prova de cada um deles para você.

**Divisibilidade por** 2
Um número é divisível por 2 quando for par;

**Divisibilidade por** 3
Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for um número divisível por 3;

**Divisibilidade por** 4
Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos da direita (isto é: dezena - unidade) formarem um número divisível por 4, ou forem dois zeros;

**Divisibilidade por** 5
Um número é divisível por 5 se o algarismo das unidades for zero ou cinco;

**Divisibilidade por** 6
Um número é divisível por 6 quando divisível simultaneamente por 2 e por 3;

**Divisibilidade por** 7
Existe um dispositivo prático para descobrir se um número é divisível por 7. Para descrever o critério consideramos um exemplo. Seja $n = 59325$. Separamos o dígito 5 das unidades e do número restante, subtraímos o dobro deste dígito, isto é,

$$\begin{array}{r} 5932 \\ \underline{-10} \\ 5922 \end{array}$$

Em seguida repetimos este procedimento até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer, facilmente, se é ou não divisível por 7.

$$\begin{array}{r} 592 \\ \underline{-4} \\ 588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \underline{-16} \\ 42 \end{array}$$

Como 42 é divisível por 7 então o número original também deverá ser divisível por 7;

**Divisibilidade por** 8
Um número é divisível por 8 quando seus três últimos algarismos da direita (isto é: centena - dezena - unidade) formarem um número divisível por 8, ou forem 3 zeros;

**Divisibilidade por** 9
Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for um número divisível por 9;

**Divisibilidade por** 10
Um número é divisível por 10 quando o algarismo das unidades for zero;

**Divisibilidade por** 11
Existe também um processo prático para verificar se um número é divisível por 11. Separam - se os algarismos de ordem par e os de ordem ímpar. A seguir efetuam - se as somas tanto dos algarismos de ordem par ($S_p$), como dos algarismos de ordem ímpar ($S_i$). Finalmente, efetua - se $|S_p - S_i|$. Se o resultado for um número divisível por 11, então o número original será divisível por 11.

**Ex:**
Seja o número 2178. $S_p = 7 + 2 = 9$ e $S_i = 8 + 1 = 9 \Rightarrow |S_p - S_i| = |9 - 9| = |0| = 0$. Logo, 2178 é divisível por 11.

**Exercícios**

1. Ache um número de três algarismos, sabendo que a soma dos mesmos é 9, o produto é 24 e o número, quando lido da direita para esquerda, é igual a $\frac{27}{38}$ do número original. (Cone Sul)

2. O inteiro positivo $n$ tem 1994 algarismos. Desses, 14 são iguais a 0 e as quantidades de vezes que os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aparecem são respectivamente proporcionais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mostre que $n$ não pode ser um quadrado perfeito. (Cone Sul)

3. Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito. Ao pressioná - la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente. Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9. Qual a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela? (Olimpíada de Maio)

4. Determine todos os pares de algarismos $(x, y)$ de modo que o número (de cinco algarismos) $75x4y$ seja divisível por 5 e por 9.

5. Determine o único número inteiro $N$ de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições:
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo $n = 2,\ 3, 4, \ldots, 9$, o número formado pelos $n$ primeiros algarismos de $N$ (da esquerda para a direita) é divisível por $n$.

6. Max escolheu 3 dígitos e, fazendo todas as permutações possíveis, obteve 6 números distintos, cada um com 3 dígitos. Se exatamente um dos números que Max obteve é um quadrado perfeito e exatamente três são primos, encontrar os 3 dígitos que Max escolheu. Dê todas as possibilidades para os 3 dígitos. (Cone Sul)

7. Paladino pediu para Antonio escolher, em segredo, um número natural com, pelo menos, três algarismos ( no sistema decimal). Em seguida pediu, ainda, que efetuasse uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraísse o menor do maior dos dois números. Finalmente, pediu que Antonio retivesse um dos algarismos diferentes de zero desse novo número e divulgasse os restantes. Paladino, em poucos segundos, descobriu o número retido. Explique como ele fez isto!

8. Determinar o menor número inteiro positivo que termina em 56, é múltiplo de 56 e a soma de seus algarismos é 56.

9. Um número inteiro chama-se autodivi se é divisível pelo número de dois algarismos formado por seus dois últimos dígitos (dezenas e unidades). Por exemplo, 78013 é autodivi pois é divisível por 13, 8517 é autodivi pois é divisível por 17. Encontre 6 números inteiros consecutivos que sejam autodivi e que tenham os dígitos das unidades, das dezenas e das centenas distintos de 0. (Olimpíada de Maio)